



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO  
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**MINNA TIIKKAJA**

**SEKOITTIMELLA VARUSTETUN SÄILIÖN TERÄKSISEN TUKE-  
RAKENTEEN DYNAAMINEN ANALYYSI**

Diplomityö

Tarkastaja:

Associate Professor Jari Mäkinen

Tarkastaja ja aihe hyväksytty

Talouden ja rakentamisen tiedekun-  
taneuvoston kokouksessa 5. mar-  
raskuuta 2014

## TIIVISTELMÄ

**MINNA TIIKKAJA:** Sekoittimella varustetun säiliön teräksisen tukirakenteen dynaaminen analyysi

Tampereen teknillinen yliopisto

Diplomityö, 90 sivua, 29 liitesivua

Huhtikuu 2015

Rakennustekniikka

Pääaine: Rakennesuunnittelu

Tarkastaja: Associate Professor Jari Mäkinen

Avainsanat: dynamiikka, harmoninen analyysi, teräsrakenne, nestesäiliö

Lietekennojen teräksinen tukirakenne on perinteisesti suunniteltu minimiominaistajuusvaatimuksen perusteella, jonka mukaan systeemin alimman ominaistajuuden on oltava vähintään 25 % suurempi kuin harmonisen herätevoiman taajuus. Ominaisuusvaatimuksen täyttävät rakenteet ovat usein erittäin jäykkiä ja kalliita, minkä takia on kannattavaa tutkia vaihtoehtoisia mitoitusmenetelmiä. Näin ollen tukirakenne suunnitellaan tässä työssä perinteisen menetelmän sijaan harmonisen analyysin avulla.

Työn teoriaosuudessa käsitellään lyhyesti muun muassa dynamiikan perusteita, säiliön sisällön ominaisuuksia ja sen mallinnusmenetelmiä sekä tukirakenteen jäykistämisen periaatteita. Laskentaosiossa teorialukujen sisältöä sovelletaan käytännön systeemiin, joka koostuu useasta vierekkäisestä säiliöstä ja teräksisestä tukirakenteesta. Kennot eli säiliöt sisältävät lietettä, jota pysty akselinen sekoitin pyörittää. Harmonisen herätetaajuuden oletetaan siten olevan sama kuin sekoittimen taajuus, mutta herätevoiman syntymismekanismeja ei käsitellä. Jotta sekoittimen toimintakyky sekä henkilöstön työturvallisuus ja -mukavuus voidaan taata, systeemin dynaamista vastetta tulee rajoittaa. Vasteen raja-arvot on määritetty työn teoriaosuudessa.

Tutkittava tukirakenne mallinnetaan ja analysoidaan pääasiassa Autodesk Robot Structural Analysis Professional -ohjelmalla. Rakenteen perustusten joustavuutta tai rakenneosien mahdollista väsymistä ei huomioida laskennassa. Tutkimuksen pääsaavutus on tukirakenteen uutta, taloudellisempiin rakenteisiin tähtäävää, suunnittelumenetelmää varten luodut peruseriaatteet. Näitä ovat muun muassa herätevoimaa koskevat käytännöt, dynaamisen vasteen raja-arvot sekä mallinnusmenetelmä, joka ottaa huomioon lietteen värähtelyn vaikutukset.

## ABSTRACT

**MINNA TIIKKAJA:** Dynamic Analysis of the Supporting Steel Structure of a Tank Equipped with an Agitator  
Tampere University of Technology  
Master of Science Thesis, 90 pages, 29 Appendix pages  
April 2015  
Master's Degree Programme in Civil Engineering  
Major: Structural Design  
Examiner: Associate Professor Jari Mäkinen

**Keywords:** dynamics, harmonic analysis, steel structure, liquid-containing tank

Traditionally the supporting steel structure of cells holding semi-liquid mixture has been designed to meet the minimum natural frequency requirement, which means that the lowest natural frequency of the system has to be at least 25 % higher than the frequency of the harmonic excitation force. The natural frequency requirement often leads to rigid and expensive structures which is why other design methods are worth studying. Therefore in this study the supporting steel structure is designed using harmonic analysis instead of the traditional method.

In the theory part of the study topics, such as the basics of dynamics, the properties and modeling practices of the contents of the tank and the stiffening of the supporting steel structure, are discussed. In the analysis part this information is applied to a practical system which consists of a row of tanks and a supporting steel structure. The tanks contain semi-liquid mixture that a vertical-axis agitator rotates. The harmonic excitation frequency is thus assumed to be the same as that of the agitator but the force creation mechanism is not discussed. The dynamic response of the system must be limited to meet the operating requirements of the agitator and to guarantee the comfort and safety of the personnel. The limiting values of the dynamic response are defined in the theory part of this study.

The supporting steel structure is modeled and analyzed mainly with Autodesk Robot Structural Analysis Professional software. The effect of foundation flexibility or possible fatigue of the structural elements is not taken into account. The main achievements of this study are the proposed basic principles of the new and more economical design method of the supporting steel structure of a cell system. These principles include the harmonic force modeling practices, the limiting values of the dynamic response and the modeling method, which takes into account the effects of the oscillation of semi-liquid mixture.

## ALKUSANAT

Tässä diplomityössä on tutkittu säiliöiden teräksistä jalustarakennetta, johon kohdistuu dynaaminen herätevoima. Työn mielenkiintoinen aihe on ideoitu yhdessä työn tilaajan Pöyry Finland Oy:n kanssa. Pöyryltä diplomityöprosessissa ovat olleet mukana etenkin Matti Ahonen ja Pekka Marjamäki, jota haluan kiittää kullantarvoisista neuvoista ja mielipiteistä etenkin laskennan alalla. Työn tarkastajana Tampereen teknillisen yliopiston puolesta on toiminut Associate Professor Jari Mäkinen, jonka syvä asiantuntemus on ollut tärkeässä roolissa diplomityön onnistumisen ja oman oppimiseni kannalta. Olenkin erittäin kiitollinen häneltä saamistani rakentavista kommentteista sekä kärsivällisestä ja selkeästä ohjauksesta.

Vaikka tutkimus- ja kirjoittamisprosessi on ollut hyvin intensiivinen, on aikaa jäänyt onneksi muillekin asioille. Päätä on tullut tyhjennettyä varsinkin tanssiharrastuksen parissa lukuisina iltoina. Tanssisalilta, opiskeluajoilta ja elämän varrelta on tarttunut mukaan myös tärkeitä ystäviä, joiden kanssa olen voinut jakaa sekä turhautumiset että onnistumisen ilot. Erityiskiitoksen ansaitsee perheeni, joka on tukenut minua niin tämän ajanjakson kuin elämän aikana yleensäkin ja myös malttanut olla kyselemättä liikoja.

Vaikka diplomityön tekeminen on ollut erittäin palkitsevaa ja kehittävää, myönnettäköön, että sen valmistuminen on myös helpotus. Kuten dynamiikkaa käsittelevän tutkimuksen luonteeseen sopii, lähes vuoden kestänyt kirjoittamisprosessi on ollut hyvin vaihteleva niin työn etenemisen, asioiden ymmärtämisen kuin motivaationkin kannalta. Samalla kun diplomityö saa kannet päälleen, päättyvät myös opiskelut ainakin tältä erää. Toivon, että alkavan työurani aikana pääsen hyödyntämään opintojen ja etenkin tämän työn myötä kertyneitä tietoja sekä oppimaan paljon uutta. Todellinen kehittyminen kohti alan asiantuntemusta on vasta alkamassa ja odotan innolla niitä haasteita, joita tämä matka tuo tullessaan.

Tampereella, 18.3.2015

Minna Tiikkaja



# SISÄLLYSLUETTELO

1	JOHDANTO .....	1
2	VÄRÄHTELY JA ELEMENTTIMENETELMÄ .....	3
2.1	Vaimenematon ominaisvärähtely .....	3
2.2	Vaimennettu ominaisvärähtely .....	6
2.3	Harmoninen pakkovärähtely .....	9
2.3.1	Vahvistuskerroin ja vaihekulma .....	10
2.3.2	Resonanssi .....	12
2.4	Usean vapausasteen värähtelijä .....	13
2.5	Ominaisarvot ja ominaisvektorit .....	14
2.6	Elementtimenetelmä .....	16
2.6.1	Neljän vapausasteen palkkielementti .....	17
2.6.2	Jäykkyysmatriisi .....	17
2.6.3	Keskitetty ja konsistentti massamatriisi .....	20
2.7	Laskuesimerkki: ominaisarvot ja -vektorit .....	23
3	SÄILIÖ, SEN SISÄLTÖ JA TUKIRAKENNE .....	27
3.1	Säiliön sisällön vaikutus .....	27
3.1.1	Nestemäiset aineet .....	28
3.1.2	Impulsiivinen komponentti .....	30
3.1.3	Konvektiivinen komponentti .....	32
3.1.4	Kiinteät aineet .....	34
3.2	Säiliön mittasuhteet ja seinämien joustavuus .....	35
3.3	Korotetun säiliön ekvivalentti mekaaninen malli .....	36
3.4	Teräsrunko .....	37
3.4.1	Ristikkojäykistys .....	38
3.4.2	Jäykistyksen optimointi .....	39
3.5	Rakenteen ja maan vuorovaikutus .....	40
3.6	Vaimennus .....	42
4	HERÄTEVOIMA JA VASTEEN RAJA-ARVOT .....	44
4.1	Harmoninen heräte .....	44
4.2	Impulssiheräte .....	45
4.3	Dynaamisen vasteen kontrollointi .....	46
4.4	Laitteelle sallittava värähtelytaso .....	48
4.5	Henkilöstölle sallittava värähtelytaso .....	49
5	LASKENTAMENETELMÄT JA -PARAMETRIT .....	53
5.1	Tutkittava systeemi .....	53
5.2	Laskentaohjelmat .....	55
5.2.1	Robot .....	56
5.2.2	Ansys .....	57
5.3	Laskentaparametrit .....	59

5.4	Systeemin mallinnusperiaatteet.....	63
6	LASKENTA JA TULOKSET .....	67
6.1	Yksittäinen jalusta: laskentamallit ja analyysityypit.....	67
6.2	Yksittäinen jalusta: päätelmät .....	71
6.3	13 kennon jalusta: laskentamallit ja analyysityypit.....	75
6.4	13 kennon jalusta: päätelmät .....	78
7	YHTEENVETO JA JOHTOPÄÄTÖKSET.....	82
	LÄHTEET.....	87

LIITE A: YKSITTÄINEN JALUSTA: LASKENTAMALLIT

LIITE B: YKSITTÄINEN JALUSTA: TULOSKUVAAJAT

LIITE C: YKSITTÄINEN JALUSTA: OMINAISTAAJUUDET

LIITE D: 13 KENNON JALUSTA: LASKENTAMALLIT

LIITE E: 13 KENNON JALUSTA: TULOSKUVAAJAT

LIITE F: 13 KENNON JALUSTA: VASTEIDEN AMPLITUDIT

LIITE G: 13 KENNON JALUSTA: OMINAISTAAJUUDET

## LYHENTEET JA MERKINNÄT

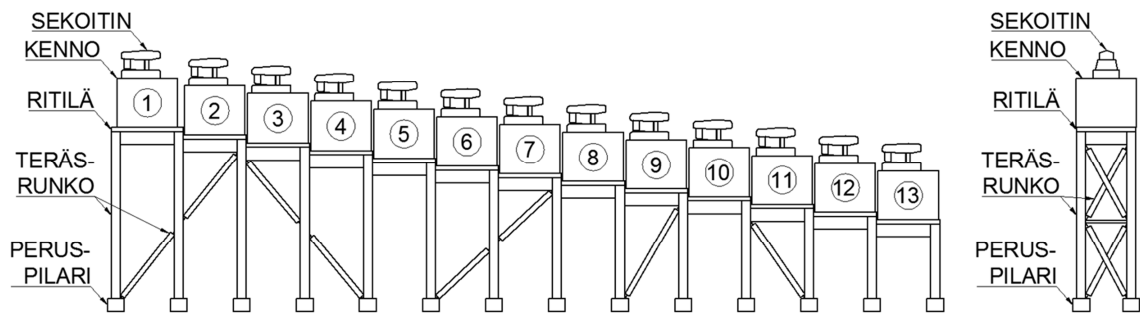
Ansysis	ANSYS ED 10.0
FEM	Finite Element Method, elementtimenetelmä
FRF	Frequency Response Function, taajuusvastefunktio
Robot	Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2014
TH	Time History, aikahistoria

$A$	pinta-ala
$a$	kiihtyvyys
$a_{max}$	suurin sallittu kiihtyvyys
$B_j$	jalustarakenteen leveys
$c$	vaimennuskerroin
$\mathbf{C}$	vaimennusmatriisi
$c_{cr}$	kriittinen vaimennuskerroin
$D_k$	kennon halkaisija
$E$	kimmokerroin
$f$	ominaistaajuus
$F$	voima
$f_D, F_D$	vaimennusvoima
$f_{DVA}$	värähtelynvaimentimen ominaistaajuus
$f_f$	taipuman ominaistaajuus
$f_I, F_I$	hitausvoima
$f_S, F_S$	kimmovoima
$f_t$	siirtymän ominaistaajuus
$F_T$	eristeen läpi välittyvä voima
$f_\theta$	kiertymän ominaistaajuus
$g$	painovoiman kiihtyvyys
$h$	nestepinnan korkeus
$h_c$	konvektiivisen massan etäisyys säiliön pohjasta
$h_i$	impulsiivisen massan etäisyys säiliön pohjasta
$H_j$	jalustan teräsosan korkeus
$H_k$	kennon korkeus
$H_{por}$	porrastus
$H_{pp}$	peruspilarin korkeus
$h_s$	tukirakenteen korkeus
$I$	jäyhyysmomentti
$J$	hitausmomentti
$k$	jäykkyyskerroin
$\mathbf{K}$	globaali jäykkyysmatriisi
$k_c$	konvektiivinen jousivakio
$\mathbf{k}^e$	lokaali jäykkyysmatriisi
$k_{ij}$	jäykkyysmatriisin kerroin
$L$	pituus
$L_j$	yksittäisen jalustan pituus
$L_{kok}$	jalustarakenteen kokonaispituus
$m$	massa
$\mathbf{M}$	globaali massamatriisi

$M$	nesteen tai lietteen kokonaismassa
$M_c$	konvektiivinen massa
$m_{DVA}$	värähtelynvaimentimen massa
$\mathbf{m}_C^e$	lokaali konsistentti massamatriisi
$\mathbf{m}_L^e$	lokaali keskitetty massamatriisi
$M_f$	säiliön joustavuuden ekvivalentti massa
$M_i$	impulsiivinen massa
$m_{ij}$	massamatriisin kerroin
$M_k$	kennon oma massa
$M_r$	alusritilän massa
$n$	lukumäärä
$P$	pakkovoima
$\mathbf{P}$	pakkovoimavektori
$P_0$	pakkovoiman amplitudi
$R$	säiliön säde
$t$	aika
$T$	ominaisvärähdysaika
$T_c$	konvektiivinen jaksonaika
$T_D$	värähdysaika, vaimennettu systeemi
$T_R$	siirtyvyys
$u$	siirtymä
$\mathbf{u}$	siirtymävektori
$u_0$	alkusiirtymä
$u_{max}$	suurin sallittu siirtymä
$u_p$	pakkovärähtely-yhtälön yksityisratkaisu
$u_{st}$	staattinen siirtymä
$V$	vahvistuskerroin
$v$	nopeus
$v_0$	alkunopeus
$V_k$	kennon efektiivinen tilavuus
$v_{max}$	suurin sallittu nopeus
$V_{max}$	maksimivahvistuskerroin
$x$	x-koordinaatti / palkin pituuskoordinaatti
$y$	y-koordinaatti
$z$	z-koordinaatti
$\xi$	suhteellinen vaimennuskerroin
$\rho$	tiheys
$\phi$	ominaisvektori
$\bar{\phi}$	normeerattu ominaisvektori
$\varphi$	vaihekulma
$\psi$	muotofunktio
$\omega$	ominaiskulmataajuus
$\Omega$	herätteen kulmataajuus
$\omega_D$	vaimennetun systeemin ominaiskulmataajuus

# 1 JOHDANTO

Työssä tutkitaan lietettä sisältävien kennojen ja teräksisen tukirakenteen muodostamaa systeemiä, jonka periaatepiirustus on esitetty kuvassa 1. Kennojen eli säiliöiden sisältöä sekoitetaan pystyaksellisella sekoittimella, mikä aiheuttaa rakenteeseen dynaamisia voimia. Systeemin herätetaajuuden oletetaan olevan sama kuin sekoittimen pyörimistajuus. Perinteisesti tällaiset rakenteet on mitoitettu systeemin ominaistajuuden perusteella siten, että alimman ominaistajuuden on oltava 25 % herätetaajuutta suurempi. Kyseinen tukirakenteen mitoitusmenetelmä johtaa erittäin jäykkiin ja kalliisiin rakenneratkaisuihin. Tämän takia tutkimuksen tarkoituksena on kehittää mitoitus tapa, jolla rakenteista saadaan suunniteltua luotettavia mutta entistä taloudellisempia. Tutkittava menetelmä perustuu rakenteen harmoniseen analyysiin ja värähtelyn rajoittamiseen.



**Kuva 1** Tutkittava systeemi.

Rakennetta tutkitaan laskennallisesti käyttäen kahta elementtimenetelmäohjelmaa ja erilaisia analyysityyppejä. Laskelmien päätarkoituksena on vertailla perinteisen, ominaistajuuteen perustuvan, mitoitusmenetelmän ja ehdotetun, harmonista analyysia hyödyntävän, menetelmän perusteella mitoitettuja rakenteita ja päätellä, onko ehdotettu menetelmä käyttökelpoinen ja kannattava. Laskennallinen analyysi perustuu kirjallisuusselvitykseen, jossa on kartoitettu tutkittavan systeemin mahdollisia mallinnustapoja ja erilaisten komponenttien, kuten vinosidetyyppien tai vaimennusjärjestelmien, toimintaa. Lisäksi on selvitetty, millä perusteilla rakenteen värähtelyä on rajoitettava ja kuinka suuret vasteet systeemille voidaan sallia.

Työn tarkoituksena on kehittää mallinnus- ja laskentaperiaatteet, joiden avulla tutkittava rakenne kannattaa suunnitella. Erityisesti tarkastellaan säiliön sisällön mallintamista siten, että lietteen heilahtelu huomioidaan ja määritetään värähtelyn maksimitaso, jolla laitteen toimintakyky ja henkilöstön turvallisuus eivät vaarannu. Käytettävät värähtelyn raja-arvot eivät huomioi rakennneosien mahdollista väsymistä. Lisäksi tarkastellaan erilaisia rakenneratkaisuja, kuten jäykistämistapoja, jotta voidaan arvioida niiden toimi-

vuotta tutkittavassa tilanteessa. Laskelmissa tukirakenteen kiinnitys perustuksiin oletetaan jäykäksi, eikä perustusten jouston vaikutusta rakenteen käyttäytymiseen siis huomioida.

Työssä keskitytään rakenteen mitoittamiseen rakennesuunnittelijan näkökulmasta, minkä takia herätevoiman syntymismekanismeja ei käsitellä. Jotta tämän tutkimuksen tuloksia voitaisiin hyödyntää todellisissa suunnittelutilanteissa, tulisi voiman suuruus ja vaikuttamistapa selvittää yhteistyössä muiden tieteenalojen tai laitteiden valmistajien kanssa. Tässä työssä herätteen oletetaan olevan pistevoima, joka pyörii säiliön pystyakselin ympäri sekoittimen taajuudella ja aiheuttaa säiliöön vaakasuuntaisia harmonisia herähteitä.

Tietävästi täsmälleen tässä työssä käsiteltyä mitoitus tapaa ei ole aikaisemmin tutkittu. Tämän takia lähdemateriaalina on osittain käytetty aihetta sivuavia, esimerkiksi maanjäristysmitoitukseen liittyviä, julkaisuja. Dynamiikan perusteoriaa on käsitelty laajasti muun muassa lähteissä [1] ja [2], ja säiliössä olevan nesteen käyttäytymistä maanjäristystilanteessa on tutkinut erityisesti Housner [3; 4]. Käytettävät värähtelyrajat perustuvat puolestaan aihetta käsitteleviin standardeihin ja ohjeisiin, kuten lähteisiin [5] ja [6].

Työn alkupuolisko käsittelee tutkimuksen kannalta oleellista taustateoriaa, ja se perustuu pääasiassa lähdemateriaaliin. Luvussa 2 esitellään dynamiikan perusteita ja selitetään käytettäviä termejä. Luku 3 puolestaan käsittelee systeemin ominaisuuksia, kuten sen vaimennuskykyä, erilaisia rakenneratkaisuita sekä mallintamismenetelmiä. Luvussa 4 on tarkasteltu systeemiin kohdistuvien voimien ominaisuuksia ja selvitetty, kuinka suuri värähtelytaso rakenteelle voidaan sallia. Työn loppuosa keskittyy laskennalliseen analyysiin ja päätelmiin alkaen luvusta 5, johon on koottu tutkittavan rakenteen perustiedot, käytettävät laskentaohjelmat sekä mallinnus- ja laskentaperiaatteet. Luvussa 6 käydään läpi laskennan tulokset sekä tehdyt päätelmät, ja lopulta luvussa 7 esitellään koko työn yhteenveto ja johtopäätökset.

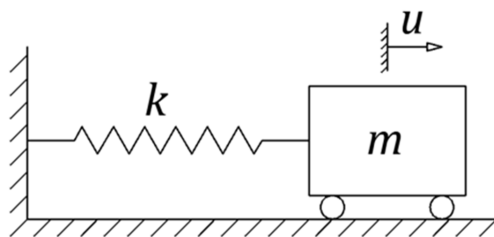
## 2 VÄRÄHTELY JA ELEMENTTIMENETELMÄ

Lujat materiaalit ovat mahdollistaneet kevyiden rakenteiden suunnittelun ja nykyaikana myös pyrkimys pitkien jänneväliden käyttöön on yleistynyt. Tällaiset hoikat ja kevyet rakenteet ovat herkkiä dynaamisille heränteille, kuten tuulen, maanjäristyksen ja koneiden aiheuttamille kuormille, ja siten myös värähtelyn syntymiselle [7, s. 373; 8, s. 1]. Dynaamisten vaikutusten huomiointi on siten yhä tärkeämpi osa niin koneiden tuentojen kuin muidenkin rakenteiden suunnittelua. Näistä syistä suunnittelijoiden on tärkeää ymmärtää värähtelytehtävien perusteet, jotka esitellään tässä luvussa. Työn kannalta tärkeitä ovat erityisesti ominaisvärähtelyn, resonanssin sekä harmonisen pakkovärähtelyn käsitteet, koska ne ovat olennaisessa osassa tutkimuksen myöhemmissä vaiheissa.

Värähtelytehtävän lähtökohtana on dynamiikan liikeyhtälö, jonka muodostamiseen käytetään tilanteeseen parhaiten sopivaa menetelmää. Liikeyhtälöstä voidaan ratkaista rakenteen ominaisaajuudet ja värähtelymuodot sekä esimerkiksi siirtymävaste [9, s. 13]. Nykyään värähtelyongelmien analysointiin käytetään tietokoneohjelmia, jotka perustuvat pääsääntöisesti elementtimenetelmään. Ohjelmat voivat käyttää liikeyhtälön ratkaisemiseen esimerkiksi iteratiivisia ratkaisualgoritmeja, mutta tässä työssä esitellään värähtelytehtävän käsinlaskentaan soveltuva menetelmä teorian havainnollistamiseksi.

### 2.1 Vaimenematon ominaisvärähtely

Ominaisvärähtelyksi kutsutaan systeemin värähtelyä sen tasapainoaseman ympärillä ilman, että systeemiin vaikuttaa ulkoisia voimia. Kun systeemi poikkeutetaan sen stabiilista tasapainoasemasta ja päästetään vapaaksi, se pyrkii palautumaan takaisin tasapainotilaansa. Saavuttaessaan tasapainoaseman systeemillä on yleensä nopeutta, joka vie sen jälleen pois tasapainoasemastaan, ja systeemi alkaa värähdellä [7, s. 373]. Tässä luvussa tarkastelu rajoitetaan yksinkertaisuuden vuoksi yhden vapausasteen vaimentamattomaan värähtelijään, eli systeemillä on vain yksi siirtymäkoordinaatti. Kuvan 2 värähtelijän massa  $m$  on keskitetty yhteen kappaleeseen ja jäykkyyttä kuvaa jousivakio  $k$ . Systeemille oletetaan liikemahdollisuus vain vaakasuunnassa.



**Kuva 2** Yhden vapausasteen värähtelijä.

On osoitettu, että poikkeutetun systeemin pyrkimys palata tasapainoasemaan johtuu liikettä vastustavista voimista [1, s. 9-16]. Nämä voimat aiheutuvat systeemin liikkeestä, sillä ne ovat verrannollisia systeemin siirtymään  $u$  tai siirtymän derivaattaan ajan  $t$  suhteen. Liikettä vastustavat voimat ovat nimeltään hitausvoima  $f_I$ , kimmovoima  $f_S$  sekä vaimennusvoima  $f_D$ . Hitausvoiman lauseke muodostetaan käyttäen d'Alembertin periaatetta, jonka mukaan massaon liittyvä hitausvoima on suoraan verrannollinen sen kiihtyvyyteen mutta vastakkaiseen suuntaan. Näiden voimien lausekkeet yhden vapausasteen systeemille ovat:

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t), \quad (1)$$

$$f_S(t) = ku(t) \quad (2)$$

ja

$$f_D(t) = c\dot{u}(t), \quad (3)$$

joissa  $m$  on värähtelijän massa,  $k$  on jäykkyysskerroin ja vaimennuskerrointa on merkitty kirjaimella  $c$ . Tämän perusteella voidaan todeta, että systeemin dynaamiseen käyttäytymiseen vaikuttavat sen massa ja jäykkyyssominaisuudet sekä mahdollinen vaimennusta aiheuttava tekijä.

Värähtelevän systeemin liikeyhtälö on käytännössä ulkoisten ja liikettä vastustavien sisäisten voimien tasapainoehto. Liikeyhtälö voidaan muodostaa monella eri menetelmällä riippuen muun muassa siitä, kuinka monimutkaisesta systeemistä on kyse [1, s. 9-20]. Yksinkertaisissa tapauksissa yhtälö voidaan kirjoittaa suoraan voimien tasapainoehdona esimerkiksi vapaakappalekuvasta nähtävien voimien perusteella. Monimutkaisemmissa tilanteissa yhtälön muodostamiseen voidaan käyttää esimerkiksi virtuaalisen työn periaatetta. Riippumatta siitä, millä tavalla liikeyhtälö on muodostettu, on sen lopullinen muoto yhden vapausasteen systeemille kaavojen (1), (2) ja (3) avulla kirjoitettuna lähteen [1] mukaisesti:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t), \quad (4)$$

jossa  $P$  tarkoittaa pakkovoimaa. Ominaisvärähtelyn tapauksessa ulkoista voimaa ei ole, jolloin liikeyhtälön oikea puoli on nolla ja kyseessä on siten homogeeninen differentiaaliyhtälö.

Tarkastellaan vaimentamatonta tilannetta, jolloin liikeyhtälö saa muodon:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0. \quad (5)$$

Homogeenisen ja lineaarisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisua etsitään käyttämällä yritettä



$$u(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (6)$$

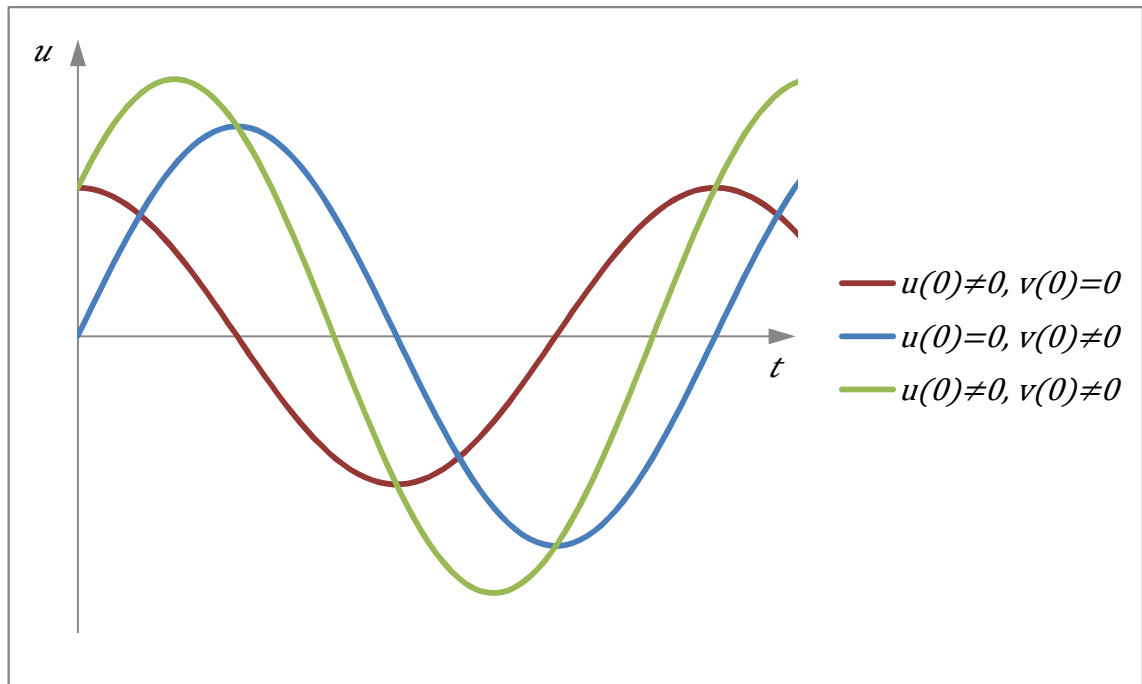
jolla on kaksi integroimisvakiota  $A$  ja  $B$  [2, s. 12-13]. Kun kaava (6) sijoitetaan yhtälöön (5), löydetään ratkaisu kaikkina ajanhetkinä vain, kun

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (7)$$

jossa suure  $\omega$  on värähtelijän ominaiskulmataajuus ja sen yksikkö on rad/s. Jotta integroimisvakiot saadaan määritettyä, merkitään siirtymän ja nopeuden alkuehtoja  $u(0) = u_0$  ja  $\dot{u}(0) = v_0$ , jolloin siirtymän lausekkeeksi saadaan

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (8)$$

Kuvassa 3 on kaavan (8) mukainen kuvaaja, josta voidaan nähdä systeemin siirtymä ajan funktiona, kun joko alkusiirtymä tai -nopeus tai molemmat ovat nollasta poikkeavia.



**Kuva 3** Vaimentamattoman värähtelijän siirtymävaste.

Ominaiskulmataajuuden  $\omega$  avulla voidaan määrittää systeemille myös sen ominaisvärähdysaika  $T$  ja ominaistaajuus  $f$  [2, s. 12-13]. Koska värähtelyä voidaan kuvata harmonisten funktioiden avulla, on värähtelyn jaksonpituuden oltava  $2\pi$ . Tällöin ominaisvärähdysajaksi saadaan

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9)$$

ja ominaistaajuudeksi

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (10)$$

jonka yksikkö on Hz.

## 2.2 Vaimennettu ominaisvärähtely

Tähän mennessä on tarkasteltu värähtelijää, joka on täysin vaimentamaton. Todellisuudessa täysin vaimentamatonta systeemiä, jonka värähtely jatkuisi ikuisesti, ei ole olemassa, vaikka vaimennus voikin olla hyvin pieni [2, s. 23]. Vaimennuksen on todettu johtuvan systeemin vaimennusvoimista, jotka muuntavat värähtelijän mekaanista energiaa muihin muotoihin, kuten lämmöksi, ja ajan kuluessa värähtely vaimenee. Vaimennus johtuu materiaalin tai rakenteen epäelastisesta käytöksestä, josta aiheutuvaa energian dissipoitumista voidaan kuvata hystereesiskäyrän avulla [10, s. 18].

Tutkittaessa rakenteiden mekaniikkaa vaimennuksen aiheuttajat voidaan lähteen [10, s. 20-23] mukaisesti jakaa kahteen ryhmään. Ensimmäinen vaimennustapa on makroskooppisesti yhtenäisen materiaalin sekä siitä valmistettujen osien vaimennus. Metallien tapauksessa materiaalin vaimennus johtuu lähinnä sisäisen kitkan aiheuttamasta epäelastisuudesta sekä sisäisillä liukupinnoilla tapahtuvasta dislokaatiosta. Metalleilla materiaalin sisäinen vaimennus on hyvin pieni, noin 0,04-0,2 % kriittisestä vaimennuksesta, eikä se juurikaan riipu jännitystasosta myötörajan alapuolella pysyessä [11]. Toinen vaimennuksen lähde on koko rakenteen eli osien yhdistelmän vaimennus. Lazanin [10] mukaan rakenteen merkittävin ominaispiirre vaimennuksen kannalta on liitokset, joissa eri osat ovat kontaktissa rajapintojen kautta. Kyseisissä kontaktipinnoissa voi syntyä liikettä pinnan normaalin sekä rajapinnan suuntaisesti. Näistä jälkimmäisen tiedetään dissipoiavan energiaa tehokkaammin. Edellä esiteltujen sisäisten vaimennustapojen lisäksi vaimennusta voi aiheutua ulkoisista lähteistä, kuten aerodynaamisista tai magneettisista ilmiöistä.

Yleisin käytetty vaimennuksen tyyppi on viskoosi vaimennus, joka on suoraan verrannollinen värähtelyn nopeuteen ja sen käsittely matemaattisesti on siten melko yksinkertaista [2, s. 24]. Analyysin helppouden vuoksi vaimennuksen oletetaan usein olevan luonteeltaan viskoosia myös tilanteissa, joissa se ei täysin vastaa vaimennusvoimien todellista käyttäytymistä. Viskoosin vaimennusvoiman suhdetta nopeuteen kuvataan kirjaimella  $c$ , jota kutsutaan vaimennuskertoimeksi. Liikkeyhtälö, jossa on mukana vaimennuksen vaikutus, on esitetty jo aiemmin kaavassa (4).

Kun kyseiselle liikkeyhtälölle etsitään ratkaisua, sijoitetaan siirtymäksi

$$u(t) = Ce^{\lambda t}, \quad (11)$$

jossa  $C$  ja  $\lambda$  ovat apusuureita [2, s. 24]. Kun yhteiset tekijät jaetaan pois, on tuloksena toisen asteen karakteristinen yhtälö

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0, \quad (12)$$

jossa  $\lambda$  on tuntematon. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan perusteella saadaan ratkaisuksi

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}. \quad (13)$$

Yhtälöllä (12) on siten joko kaksi reaalista juurta tai kompleksiset liittoluvut riippuen diskriminantin arvosta. Tästä voidaan päätellä, että liikeyhtälön ratkaisu riippuu vaimennuksen suuruudesta eli käytännössä vaimennuskertoimesta  $c$ . Jos yhtälön (12) reaaliset juuret ovat yhtä suuret eli diskriminantti on nolla, systeemi on kriittisesti vaimennettu [7, s. 379-381]. Tällöin vaimennuskertoimen tulee olla

$$c_{cr} = \sqrt{4mk} = 2m\omega, \quad (14)$$

jota kutsutaan kriittiseksi vaimennuskertoimeksi. Toinen tapa merkitä systeemin vaimennusta on suhteellinen vaimennuskerroin  $\xi$ , joka kuvaa vaimennuksen suhdetta kriittiseen vaimennukseen eli

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}. \quad (15)$$

Suhteellisen vaimennuskertoimen arvo on kriittisesti vaimennetulle systeemille luonnollisesti yksi.

Kriittisesti vaimennettu systeemi ei ala varsinaisesti värähdellä, vaan lähestyy asymptoottisesti tasapainoasemaansa [1, s. 26]. On myös todettu, että vaimennuskertoimen arvo yksi on pienin mahdollinen vaimennus, joka estää vapaan värähtelyn syntymisen. Tällainen värähtelijä lähenee tasapainoasemaansa nopeammin kuin muilla vaimennusvoimakkuuksilla [7, s. 381]. Jos suhteellinen vaimennuskerroin on suurempi kuin yksi, systeemi on ylikriittisesti vaimennettu [1, s. 32]. Myöskään ylikriittisesti vaimennettu systeemi ei ala värähdellä, vaan lähestyy asymptoottisesti kohti tasapainoasemaansa saavuttaen sen kuitenkin hitaammin kuin kriittisesti vaimennetussa tilanteessa.

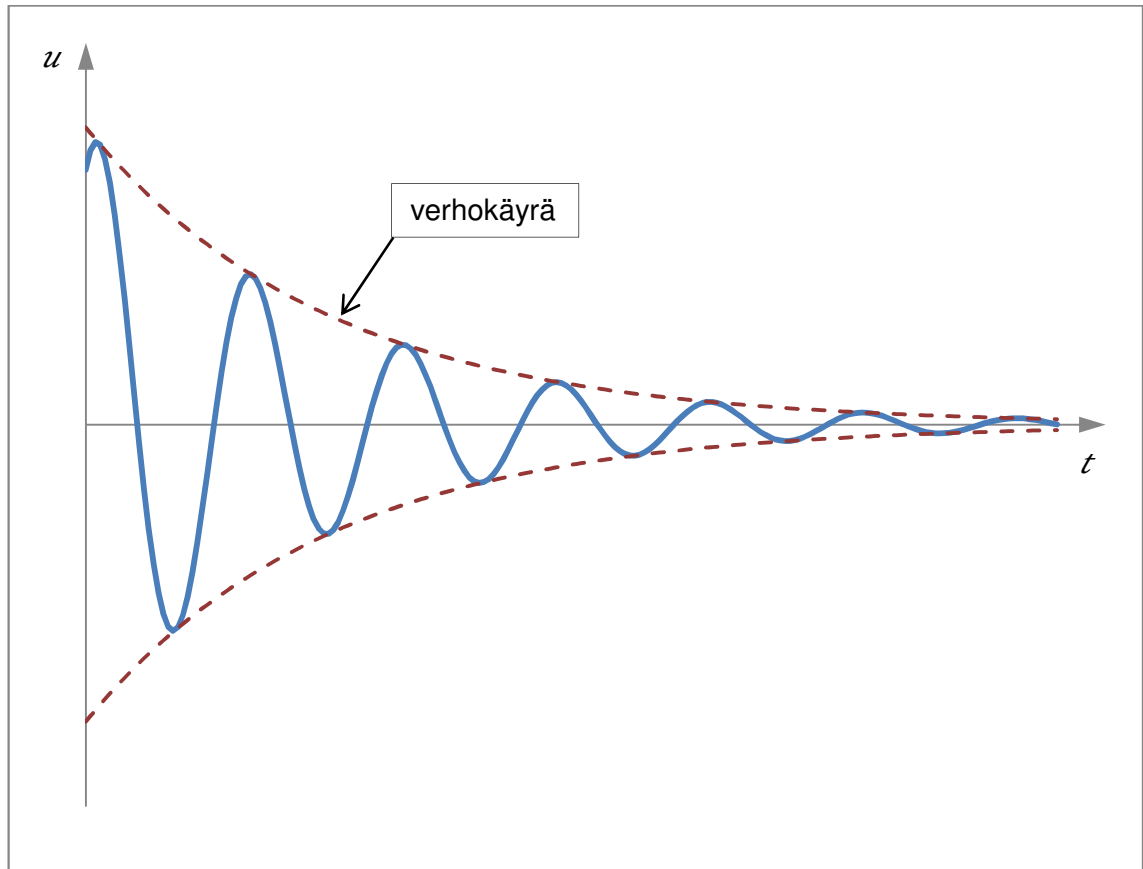
Todellisten rakenteiden ja myös tämän työn kannalta oleellisin tapaus on alikriittisesti vaimennettu systeemi, jolle suhteellinen vaimennuskerroin on pienempi kuin yksi [7, s. 381-382]. Tällaiselle värähtelijälle liikeyhtälön ratkaisuksi eli värähtelyn siirtymävas- teeksi on annettu:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left( u_0 \cos(\omega_D t) + \frac{v_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right). \quad (16)$$

Kaavassa (16) esiintyvä suure  $\omega_D$  on vaimennetun systeemin ominaiskulmataajuus, joka saadaan lähteen [7] mukaisesti kaavasta

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (17)$$

ja sen arvo on aina pienempi kuin vaimentamattoman värähtelijän ominaiskulmataajuus. Alikriittisesti vaimennetun värähtelijän siirtymävaste on esitetty kuvassa 4.



**Kuva 4** Alikriittisesti vaimennetun värähtelijän siirtymävaste.

Kuvaajasta nähdään, että alikriittisesti vaimennettu systeemi värähtelee tasapainoasemansa ympärillä siten, että sen amplitudi pienenee jokaisella värähdysjaksolla. Vaimeinevan värähtelyn värähdysaika  $T_D$  pysyy kuitenkin vakiona ja sen pituus on

$$T_D = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (18)$$

[2, s. 27-28]. Tästä kaavasta voidaan nähdä, että alikriittisesti vaimennetun systeemin värähdysaika on pidempi kuin vaimentamattoman.

### 2.3 Harmoninen pakkovärähtely

Pakkovärähtelyksi kutsutaan jaksollista liikettä, joka syntyy, kun systeemiin vaikuttaa ulkoinen muuttuva voima eli pakkovoima [7, s. 373]. Kuormitus voi olla käytännössä joko jaksotonta tai jaksollista, mutta tämän työn kannalta oleellisin kuormitustyyppi on jaksollinen harmoninen kuormitus, jolloin voiman suuruus vaihtelee sini- tai kosinifunktion mukaisesti. Mikä tahansa jaksollinen kuormitus voidaan myös aina esittää likimääräisesti harmonisten termien avulla Fourier-sarjana [1, s. 2]. Harmonista kuormitusta syntyy esimerkiksi koneessa, jonka pyörienvien osien massa on epäkeskinen [2, s. 36].

Kun vaimentamattomaan yhden vapausasteen systeemiin vaikuttaa harmoninen pakko-voima  $P$ , on liikeyhtälö muotoa

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = P_0 \sin(\Omega t), \quad (19)$$

jossa  $P_0$  on herätteen amplitudi ja  $\Omega$  herätteen kulmataajuus [2, s. 37]. Kyseinen liikeyhtälö on toisen kertaluvun epähomogeeninen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun ja epähomogeenisen yhtälön yksityisratkaisun yhdistelmä.

Yhtälön (19) homogeenisen osan ratkaisu on ominaisvärähtelyn siirtymäavaste ja siten kaavan (6) mukainen. Koska heräte on harmoninen, on järkevää olettaa, että myös pakkovoiman aiheuttama siirtymä vaihtelee sinikäyrän mukaisesti ja näin ollen yksityisratkaisu  $u_p$  on

$$u_p(t) = U \sin(\Omega t), \quad (20)$$

jossa  $U$  on ratkaistava vakio eli käytännössä maksimisiirtymä [2, s. 37-38]. Sijoitetaan tämä yksityisratkaisu liikeyhtälön lausekkeeseen (19), jolloin päädytään ratkaisuun

$$U = \frac{P_0}{k - m\Omega^2}. \quad (21)$$

Kun tähän vielä sijoitetaan kaavan (7) mukainen yhteys ja otetaan huomioon myös ominaisvärähtelyn osuus, täydellisen differentiaaliyhtälön yleiseksi ratkaisuksi ja siten myös liikeyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$u(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{P_0/k}{1 - (\Omega/\omega)^2} \sin(\Omega t). \quad (22)$$

Edellisessä lausekkeessa voidaan vielä merkitä

$$u_{st} = \frac{P_0}{k}, \quad (23)$$

joka tarkoittaa siirtymää, jonka voima  $P_0$  aiheuttaa, kun se vaikuttaa systeemiin staattisena. Kaavasta (22) voidaan nähdä, että kokonaisvärähtely on ominais- ja pakkovärähtelyn summa. Koska todelliset systeemit eivät koskaan ole täysin vaimentamattomia, ominaisvärähtelyn osuus vaimenee käytännössä nopeasti pois [1, s. 34]. Vapaan värähtelyn aiheuttamaa vastetta kutsutaan siksi lyhytaikaiseksi eli transientiksi vasteeksi. Pakkovoiman aiheuttama värähtely ei sen sijaan vaimene ajan kuluessa, joten sitä kutsutaan pysyväksi vasteeksi.

### 2.3.1 Vahvistuskerroin ja vaihekulma

Jos kaavasta (22) otetaan huomioon vain pakkovoiman aiheuttaman värähtelyn osuus, voidaan vaste kirjoittaa muodossa

$$u(t) = \frac{u_{st}}{1 - (\Omega/\omega)^2} \sin(\Omega t) = V u_{st} \sin(\Omega t), \quad (24)$$

jossa  $V$  on vahvistuskerroin

$$V = \frac{1}{1 - (\Omega/\omega)^2} \quad (25)$$

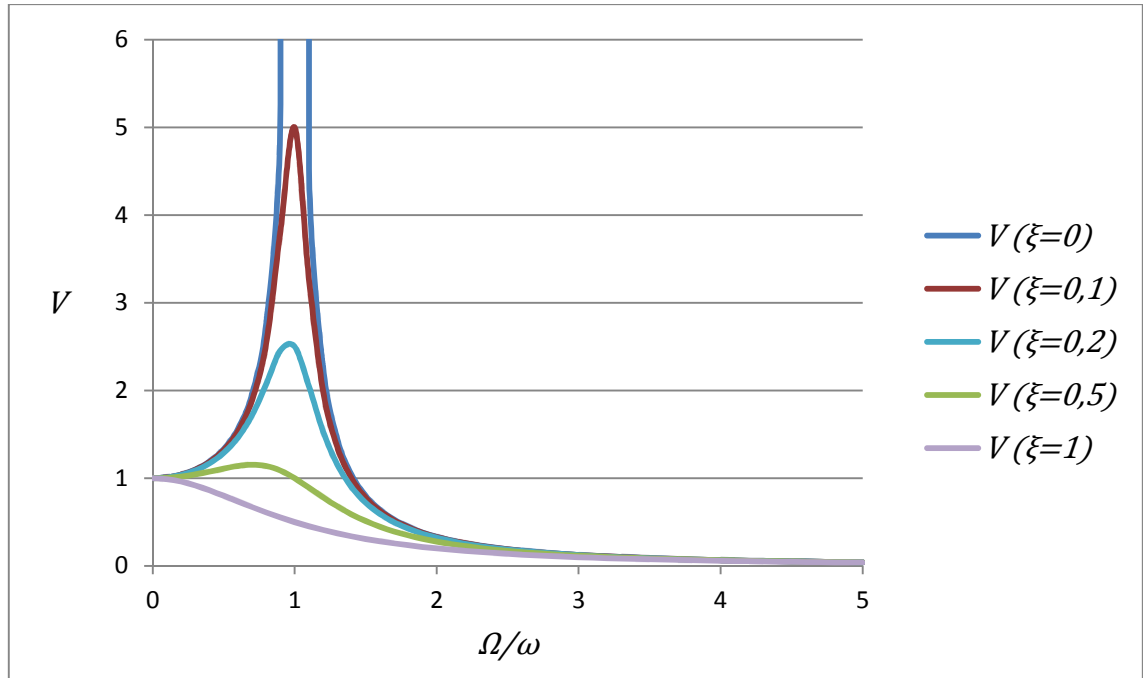
[1, s. 33-38]. Todetaan lähteen [1] perusteella, että vaimennetulle pakkovärähtelijälle vahvistuskerroin on vastaavasti

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega)^2)^2 + (2\xi \Omega/\omega)^2}} \quad (26)$$

Vahvistuskerroin kuvaa, kuinka paljon suurempi siirtymä syntyy, kun maksimiarvoltaan samansuuruinen kuorma vaikuttaa systeemiin harmonisesti staattisen sijaan. Toisaalta on myös todettu, että kun systeemissä ei ole vaimennusta ja herätetaajuus on ominaistajuutta pienempi, vaste on samassa vaiheessa kuormituksen kanssa. Vaimennetussa värähtelijässä sen sijaan vaste on herätettä jäljessä kulman  $\varphi$  verran. Tätä suuretta kutsutaan vaihekulmaksi ja se määritetään

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{2\xi \Omega/\omega}{1 - (\Omega/\omega)^2} \right). \quad (27)$$

Kaavoista (26) ja (27) voidaan nähdä, että vahvistuskerroin ja vaihekulma riippuvat sekä heräte- ja ominaistajuuden suhteesta että vaimennuskertoimesta. Vahvistuskerroimen kuvaajat eri taajuussuhteilla  $\Omega/\omega$  ja vaimennuksilla on esitetty kuvassa 5.



**Kuva 5** Vahvistuskertoimen eri vaimennuskertoimen arvoilla.

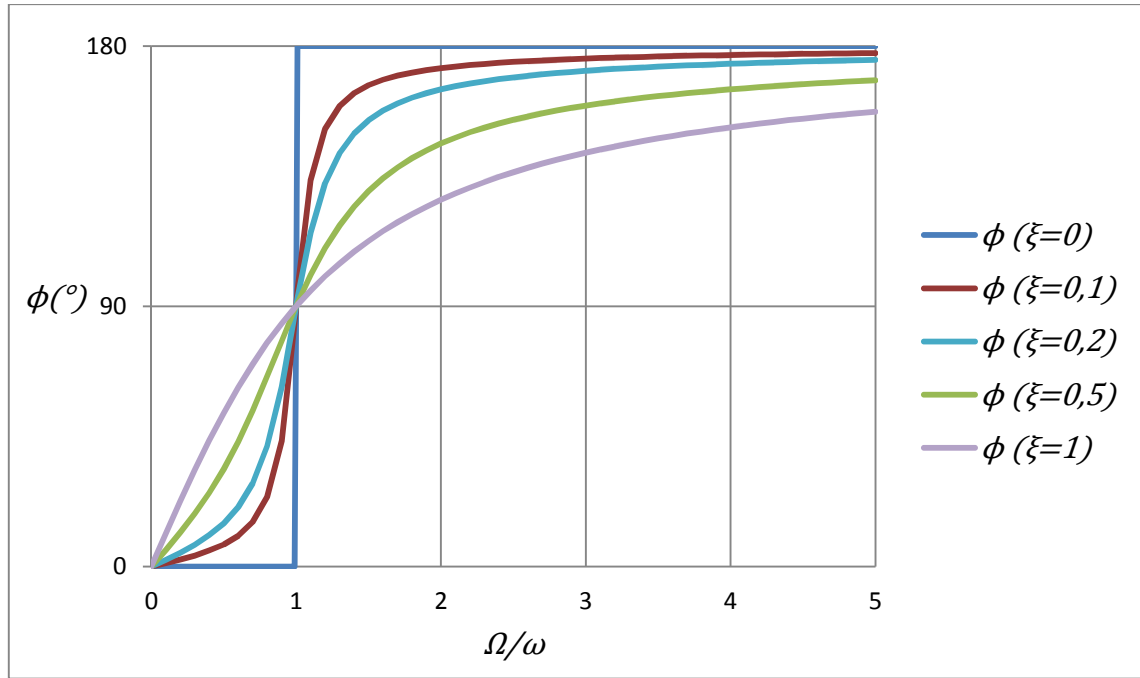
Kuvasta 5 nähdään, että kun taajuussuhde lähestyy arvoa yksi, vaimentamattomassa tapauksessa vahvistuskertoimen lähestyy ääretöntä. Myös pienillä vaimennuksen arvoilla vahvistuskertoimella on ääriarvo taajuussuhde yhden läheisyydessä, mutta kriittisesti vaimennetulla systeemillä ei ääriarvoa voida havaita. Todellisuudessa vaimennetulle systeemille maksimiampplitudi saavutetaan, kun taajuuksien suhde on pienempi kuin yksi [1, s. 42]. Tämä voidaan todentaa ratkaisemalla kaavasta (26) taajuussuhde, jolla vahvistuskertoimen saavuttaa on ääriarvonsa:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)_{peak} = \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (28)$$

Tätä vastaava vahvistuskertoimen saadaan sijoittamalla taajuussuhde (28) vahvistuskertoimen lausekkeeseen (26), jolloin maksimivahvistuskertoimen on

$$V_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (29)$$

Kuvassa 6 on puolestaan havainnollistettu vaihekulman riippuvuutta taajuussuhteesta ja vaimennuskertoimesta.



**Kuva 6** Vaihekulma eri vaimennuskertoimen arvoilla.

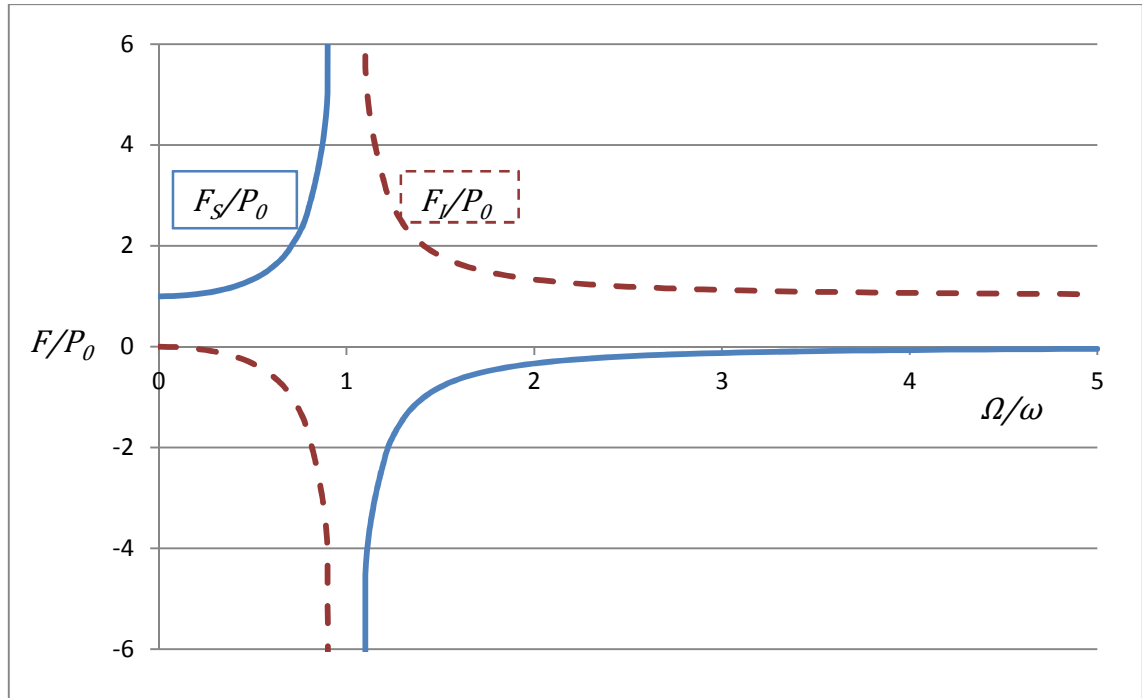
Kuvasta 6 havaitaan, että kun herätetaajuus on pieni verrattuna rakenteen ominaistaa-juuteen, vaste ja heräte ovat melkein samassa vaiheessa. Kun herätetaajuutta nostetaan, vaste alkaa jäädä herätteestä jälkeen, ja taajuussuhteen ollessa yksi vaihekulma on  $90^\circ$  vaimennuskertoimen arvosta riippumatta. Herätetaajuuden edelleen kasvaessa myös vaihekulma kasvaa lähestyen  $180^\circ$ :ta. Käytännössä vaihekulman ollessa  $180^\circ$  siirtymä saavuttaa maksiminsa samaan aikaan kuin pakkovoima, mutta sen suunta on päinvastainen [12, s. 19-20].

### 2.3.2 Resonanssi

Tilannetta, jossa herätteen taajuus on yhtä suuri kuin rakenteen ominaistaa-juus, kutsutaan resonanssiksi [7, s. 388]. Kuten edellisessä luvussa sekä lähteessä [7] on todettu, taajuuksien suhteen ollessa noin yksi vahvistuskertoimella on usein ääriarvo ja vaihe- kulman suuruus vaihtuu nopeasti. Resonanssitilanteessa värähtelyn amplitudi voi siis kasvaa hyvin suureksi, vaimentamattomalla värähtelijällä teoreettisesti äärettömyyteen asti, joten resonanssin syntyminen voi olla hyvin haitallista rakenteille. Tästä syystä resonanssitilanne pyritään usein välttämään rakenteiden ja koneiden suunnittelussa.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvaa 7, jossa on esitetty vaimentamattoman värähtelijän kimmo- ja hitausvoiman suhde harmoniseen voimaan taajuussuhteen funktiona. Kuvaa- jasta voidaan nähdä, että kaikilla taajuussuhteilla kimmovoiman  $F_S$  ja hitausvoiman  $F_I$  yhteenlaskettu arvo on yhtä suuri kuin herätevoima. Kun taajuussuhde on yksi, vaihe- kulma muuttuu  $180^\circ$ . Tästä johtuen sekä kimmo- että hitausvoiman merkit vaihtuvat päinvastaisiksi, kun resonanssitila ylitetään.





**Kuva 7** Kimmo- ja hitausvoiman riippuvuus taajuussuhteesta (perustuu lähteeseen [1]).

Kuvan 7 mukaan tilanteessa, jossa herätetaajuus on hyvin pieni, taajuussuhde on lähellä nollaa. Tällöin systeemi käyttäytyy lähes staattisesti ja hitausvoiman vaikutus on käytännössä merkityksetön. Näin ollen jos taajuussuhde on hyvin pieni, tilanne voidaan ratkaista staattisena. Toisaalta kun herätetaajuus ja siten myös taajuussuhde kasvaa, kimmovoima lähestyy nollaa ja liikettä vastustava voima on käytännössä pelkkää hitausvoimaa. Voidaankin todeta, että jos hitausvoimat muodostavat suuren osan systeemin tasapainottavista voimista, eli jos taajuussuhde on riittävän suuri, tulee tilanteen dynaaminen luonne ottaa ratkaisussa huomioon [1, s. 4, 309-310].

## 2.4 Usean vapausasteen värähtelijä

Monet systeemit voidaan yksinkertaistaa laskentaa varten yhden vapausasteen värähtelijöiksi, vaikka todellisuudessa millään systeemillä ei ole tarkalleen vain yhtä vapausastetta [9, s. 47]. On kuitenkin todettu, että useille rakenteille on sallittava useampi kuin yksi vapausaste, jotta niiden liikettä voitaisiin kuvata riittävällä tarkkuudella. Systeemin liikettä mallinnetaan silloin itsenäisillä koordinaateilla, kuten siirtymillä ja kiertymillä, jolloin vapausasteita on yhtä monta kuin näitä koordinaatteja. Myös systeemin ominaistaajuuksien ja niitä vastaavien ominaismuotojen lukumäärä on sama kuin vapausasteiden määrä.

Usean vapausasteen värähtelijän erilliset osat, jotka on yhdistetty toisiinsa joustavasti, voivat liikkua itsenäisesti eri taajuuksilla. Beardsin [9, s. 47] mukaan tietyissä tilanteissa tällaiseen värähtelevään systeemiin kuuluvat kappaleet ovat harmonisessa liikkeessä samalla taajuudella, jolloin ne saavuttavat maksimiampplitudinsa samaan aikaan, vaikka-

kin mahdollisesti eri suunnissa. Kyseistä tilannetta kutsutaan ominaistaajuudeksi ja sitä vastaavaa värähtelymuotoa ominaismuodoksi. Tavallisesti eri ominaistaajuudet ja ominaismuodot numeroidaan alimmasta eli ensimmäisestä ominaistaajuudesta lähtien suursjärjestykseen.

Pakkovärähtelijää, jolla on useita vapausasteita, ei käsitellä tässä työssä laskennan kannalta tarkemmin. On kuitenkin todistettu, että kun usean vapausasteen systeemiin vaikuttaa pakkovoima, kokonaisvärähtely on eri värähtelymuotojen superpositio, mutta eri värähtelymuodot vastaavat kuormitukseen itsenäisesti [1, s. 308-309]. Tämän takia vahvistuskerroin voidaan määrittää jokaiselle muodolle erikseen samoilla periaatteilla kuin yhden vapausasteen systeemille. Toisaalta on myös huomioitava, että yksittäisen värähtelymuodon vaikutus koko systeemin vasteeseen riippuu taajuussuhteen lisäksi kuormituksen jakautumasta. Ne värähtelymuodot, joissa rakenne pyrkii siirtymään samalla tavalla kuormituksen kanssa, heräävät voimakkaasti. Vastaavasti ne muodot, joissa syntyy negatiivisia alueita eli kuorma ja rakenne liikkuvat vastakkaisiin suuntiin, vaikuttavat kokonaisvasteeseen vähemmän.

## 2.5 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Kaikki usean vapausasteen värähtelyongelmat voidaan ratkaista samoilla periaatteilla riippumatta siitä, onko vapausasteita kaksi vai enemmän [9, s. 63]. Vapausasteiden määrä kuitenkin vaikuttaa laskentamenetelmän valintaan, sillä mitä enemmän systeemillä on liikemahdollisuuksia, sitä enemmän värähtelytehtävän laskenta vie aikaa ja kapasiteettia [13, s. 378]. Onkin suositeltu, että monimutkaisten systeemien ratkaisemisessa käytettäisiin tehokkaampia iteratiivisia laskentamenetelmiä. Tässä työssä esitellään kuitenkin yksinkertaisten tilanteiden käsinlaskentaan soveltuva menetelmä, jonka avulla havainnollistetaan liikeyhtälön ratkaisemista.

Monen vapausasteen systeemille liikeyhtälö muodostetaan samalla tavalla kuin yhden vapausasteen systeemille, mutta se kannattaa esittää matriisimuodossa:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t), \quad (30)$$

jossa  $\mathbf{M}$  on massamatriisi,  $\mathbf{C}$  on vaimennusmatriisi ja  $\mathbf{K}$  on jäykkyysmatriisi [8, s. 37]. Myös siirtymä  $\mathbf{u}$  ja sen derivaatat sekä herätevoima  $\mathbf{P}$  on esitetty vektorimuodossa. Kun halutaan ratkaista vaimentamattoman systeemin ominaisvärähtelytaajuudet, vaimennus ja ulkoinen kuormitus ovat arvoltaan nollia, jolloin liikeyhtälö on

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (31)$$

Koska systeemin värähdellessä ominaistaajuudellaan värähdysliike on harmonista, sijoitetaan siirtymäksi

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} \sin(\omega t), \quad (32)$$

jossa  $\boldsymbol{\phi}$  on siirtymän suuruutta kuvaava vektori, jota kutsutaan ominaisvektoriksi [1, s. 201]. Kun siirtymän lauseke (32) sijoitetaan liikeyhtälöön (31) ja yhteiset tekijät jaetaan pois, saadaan tulokseksi

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}, \quad (33)$$

joka on kahden matriisin ominaisarvotehtävä. Tälle etsitään epätriviaalia ratkaisua, jolloin ainakin jokin siirtymävektorin alkioista on nollasta poikkeava. Yhtälön ratkaisuna saadaan ominaispari, jonka muodostavat ominaisarvo  $\omega^2$  ja ominaisvektori  $\boldsymbol{\phi}$  [8, s. 39]. Ominaisarvoista saadaan luonnollisesti ratkaistua rakenteen ominaiskulmataajuudet, ja ominaisvektorin avulla voidaan arvioida rakenteen ominaisvärähtelymuotoa. Ominaisarvot löydetään karakteristisen yhtälön

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (34)$$

ratkaisuna. Jokaista ominaisarvoa vastaava ominaismuoto saadaan edelleen sijoittamalla ominaisarvot yksitellen lausekkeeseen

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (35)$$

ja esimerkiksi asettamalla ominaisvektorin yhden komponentin arvoksi yksi, jolloin vektori on normeerattu [8, s. 43]. Loput vektoreiden komponentit saadaan laskettua kaavan (35) muodostamasta yhtälöryhmästä.

Ominaisarvoja, ja siten myös ominaiskulmataajuuksia, on yhtä monta kuin vapausasteita, mutta on mahdollista, että joku ominaisarvoista esiintyy useampaan kertaan [14, s. 385]. On kuitenkin huomattava, että useampikertaisillakin ominaisarvoilla on toisistaan poikkeavat ominaisvektorit. Yksi tai useampi ominaisarvoista voi myös olla suuruudeltaan nolla. Cook [14] on todennut, että tällainen tilanne syntyy, jos rakenteella on jäykän kappaleen liikemahdollisuus tai rakenne voi muodostaa mekanismin.

Jokaista ominaisarvoa vastaava ominaisvektori saadaan siis ratkaistua kaavasta (35). Voidaan kuitenkin havaita, että kyseinen yhtälö toteutuu, vaikka ominaisvektori kerrottaisiin millä tahansa mielivaltaisella vakiolla [1, s. 204, 214]. Värähtelyn amplitudia ei siis voida ratkaista, mutta sen muoto saadaan selville. Koska ominaisvektorin alkioita voidaan kertoa vakioilla, voidaan vektori myös normeerata lähteen [1] mukaisesti. Yksi normeerausmenetelmä on asettaa jonkin ominaisvektorin alkion arvoksi yksi. Usein tämä referenssikoordinaatti on vektorin ensimmäinen tai arvoltaan suurin alkio. Yleisesti käytetty menetelmä on myös normeerata ominaisvektorit massamatriisin suhteen. On todistettu [8, s. 42-43], että ominaisvektorit ovat ortogonaalisia jäykkyys- ja massamatriisin suhteen. Tähän perustuen vektorit voidaan normeerata massamatriisin suhteen, mistä seuraa

$$\bar{\phi}_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1 \quad (36)$$

ja

$$\bar{\phi}_i^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2, \quad (37)$$

jossa  $\bar{\phi}$  on massamatriisin suhteen normeerattu ominaisvektori.

## 2.6 Elementtimenetelmä

Käytännön dynamiikan laskentatehtävät kannattaa poikkeuksetta laskea tietokoneohjelmien avustuksella. Nykyään lähes kaikki rakenteiden analysointiin suunnatut valmisohjelmat perustuvat elementtimenetelmään, joka tunnetaan myös nimellä FEM (Finite Element Method). Tässä numeerisessa laskentamenetelmässä rakenne jaetaan osiin eli elementteihin, jotka yhdistyvät toisiinsa niin sanotuissa solmupisteissä. Ongelman ratkaiseminen on tällä tavoin yksinkertaista, koska jokainen elementti vaikuttaa ainoastaan viereisiin elementteihin yhteisten solmupisteiden välityksellä [1, s. 8]. Kun elementtien materiaaliominaisuudet sekä rakenteen tukiehdot ja siihen vaikuttava kuormitus tiedetään, saadaan lopulta selville koko rakenteen käyttäytyminen [13, s. 1-6].

Rakenteen venymien, jännitysten ja muiden tarvittavien suureiden laskenta perustuu elementtimenetelmässä yleensä solmupisteiden siirtymien ratkaisemiseen [1, s. 7-8]. Kun siirtymien suunnat ja suuruudet tiedetään, voidaan koko elementin alueen siirtymäkenttä ratkaista interpolointifunktioiden avulla. Elementin sisäinen siirtymäkenttä kertoo siis, miten siirtymä jakautuu solmupisteiden välillä. Solmusiirtymien ja interpolointifunktioiden perusteella saadaan edelleen määritettyä koko rakenteen siirtymät. Myös esimerkiksi rakenteen jännityskenttä voidaan ratkaista siirtymäkentän perusteella käyttäen hyväksi siirtymän, venymän ja jännityksen välillä olevaa yhteyttä [13, s. 1-6].

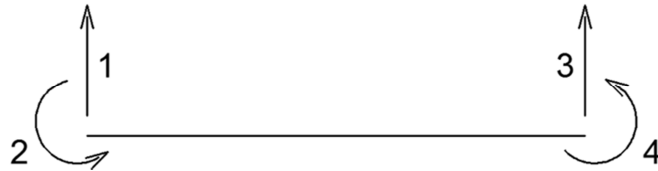
Elementtimenetelmän antama ratkaisu on luodun mallin tarkka ratkaisu, mutta se kuvaa todellisuutta vain likimääräisesti. Ratkaisun tarkkuus riippuu esimerkiksi elementtien määrästä ja laskennan numeerisesta virheestä [14, s. 3-4]. On kuitenkin todettu, että suurin vaikutus tarkkuuteen on sillä, kuinka hyvin laskentamalli kuvaa todellista tilannetta. Tähän vaikuttavat muun muassa käytetyt materiaalioletukset ja tukiehdot.

Elementtimenetelmään perustuvissa ohjelmissa suurin osa tämän luvun asioista, kuten matriisien muodostaminen ja kokoaminen, on ohjelmoitu tapahtumaan siten, että käyttäjän ei tarvitse kiinnittää niihin huomiota. Menetelmän perusasiat esitellään kuitenkin tässä työssä suppeasti, jotta ohjelman käyttäjä voisi paremmin ymmärtää sen toimintaperiaatteet ja menetelmään liittyvät rajoitukset sekä osaisi paremmin valita laskentatilanteeseen sopivat parametrit.

### 2.6.1 Neljän vapausasteen palkkielementti

Elementtimenetelmässä käytettävät elementit voivat olla yksi-, kaksi- tai kolmiulotteisia ja periaatteessa minkä tahansa muotoisia [14, s. 4-8]. Myös elementtien vapausasteiden eli liikemahdollisuuksien määrä vaihtelee ja elementin sisäinen kenttä, joka interpoloi esimerkiksi siirtymää elementin sisällä, voi olla erilainen elementtityypistä riippuen. Suunniteltavan rakenteen geometria ja se, millaisia suureita halutaan ratkaista, määrittävät, millaista elementtityyppeä analyysissä kannattaa käyttää.

Tämän työn kannalta olennaisin elementtityyppi on palkkielementti, jolla on kaksi siirtymä- ja kaksi kiertymävapausastetta eli yhteensä neljä koordinaattia. Yksinkertainen palkkielementti ei ota huomioon palkin väännön tai aksiaalisuuntaisen venymisen vaikutusta [14, s. 24-28]. Usein palkit voidaankin olettaa venymättömiksi, mutta tarvittaessa jäykkyyttä kuvaavaan matriisiin lisätään venymisen huomioon ottava termi. Venymätön palkkielementti ja sen vapausasteet numeroituina on esitetty kuvassa 8.



*Kuva 8 Neljän vapausasteen venymätön palkkielementti.*

Kyseisen palkkielementin muodostamiseen käytetään yksinkertaista Euler-Bernoullin palkkiteoriaa, joka ei huomioi liukuman eikä pyörimishitauden vaikutusta [14, s. 24]. Mallinnusvirheet ovat yleensä näiden yksinkertaistusten vaikutuksia suurempia, joten kyseinen teoria on useissa tapauksissa riittävän tarkka [9, s. 87]. On kuitenkin huomioitava, että liukuman ja pyörimishitauden vaikutukset korostuvat, jos tutkitaan hyvin korkeataajuisia värähtelyä tai jos palkki on hyvin paksu.

### 2.6.2 Jäykkyyismatriisi

Elementin jäykkyysominaisuuksia kuvataan jäykkyyiskertoimien ja niistä kootun jäykkyyismatriisin avulla [2, s. 306-311]. Jäykkyysskerroin  $k_{ij}$  kertoo kuinka suuri voima aiheutuu vapausasteelle  $i$ , kun vapausasteelle  $j$  annetaan siirtymä, jonka suuruus on yksi. Virtuaalisen työn periaatteen mukaisesti ulkoisen työn tulee olla yhtä suuri kuin sisäisen työn, joka aiheutuu tutkittavan palkkielementin tapauksessa taivutusmomentista ja kiertymästä koko elementin alueella. Kun kiertymä esitetään muotofunktion  $\psi$  avulla, päädytään lausekkeeseen

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx, \quad (38)$$

jonka tuloksena saadaan palkkielementin jäykkyyuskertoimet [1, s. 182]. Edellisessä lausekkeessa kirjain  $E$  on materiaalin kimmokerroin ja  $I$  palkin jäyhyysmomentti. Palkkielementin pituus on  $L$ , ja  $x$  on palkin suuntainen pituuskoordinaatti, jonka nollakohta on palkin päässä. Kaavan (38) mukaisesti määritetyt jäykkyyuskertoimet voidaan koota matriisiksi, joka kuvaa koko elementin jäykkyyttä. Todetaan, että jäykkyyuskertoimille on aina voimassa

$$k_{ij} = k_{ji} \quad (39)$$

Bettin lauseen mukaisesti, jolloin elementin jäykkyyismatriisin on oltava symmetrinen [2, s. 309-311]. Neljän vapausasteen venymättömän palkkielementin jäykkyyismatriisi, kun jäykkyyuskertoimet on ratkaistu kaavasta (38), on siten

$$\mathbf{k}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Jäykkyyserrointen määrittämisessä käytetyt muotofunktiot, joita kutsutaan myös interpolointifunktioiksi, interpoloivat siirtymiä koko elementin matkalla [1, s. 7-8, 180]. Elementin taipumamuoto koko sen alueella saadaan siten ilmaistua solmusiirtymien ja interpolointifunktioiden avulla. Lähteen [1] mukaan muotofunktio kuvaa, mikä on palkin siirtymä sen jokaisessa pisteessä, kun yhden solmusiirtymän arvo on yksi ja muut vapausasteet pysyvät liikkumattomina. Elementillä on siten yhtä monta interpolointifunktiota kuin sillä on vapausasteita, ja muotofunktion arvon on oltava yksi oman ja nolla muiden koordinaattien kohdalla. Tämän määritelmän lisäksi funktion ensimmäisen derivaatan tulee olla määritelty elementin sisällä ja siirtymien on oltava jatkuvia elementin rajoilla [13, s. 50]. Palkkielementin tapauksessa muotofunktioille asetetut vaatimukset toteuttavat funktiot ovat kolmannen asteen Hermiten polynomeja [1, s. 180]. Kun vapausasteet on numeroitu kuvan 8 mukaisesti, niitä vastaavat muotofunktiot ovat:

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad (41)$$

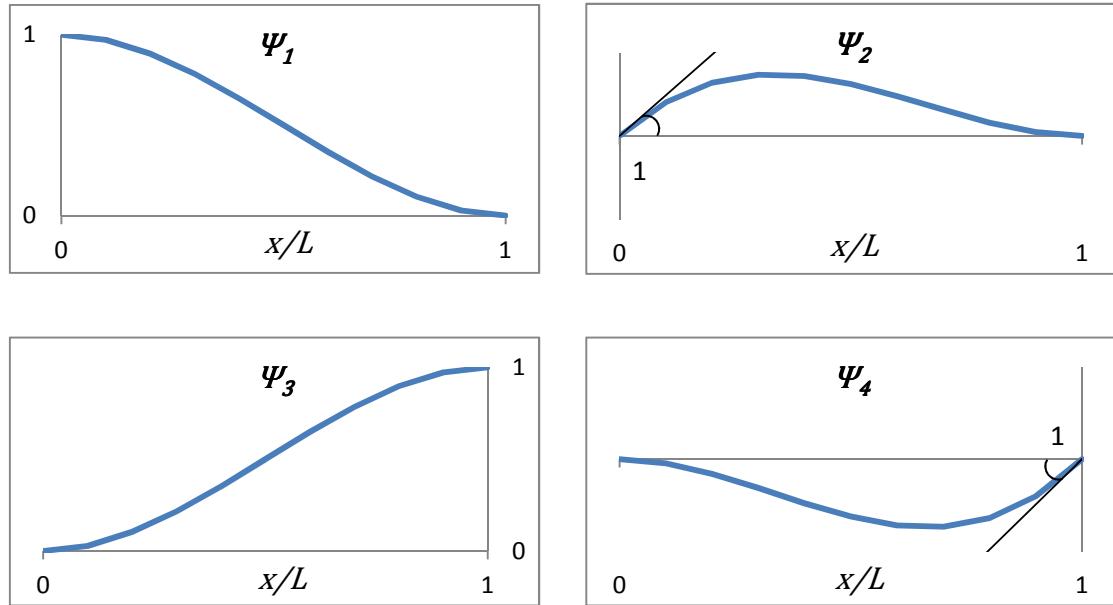
$$\psi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (42)$$

$$\psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad (43)$$

ja

$$\psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right), \quad (44)$$

joiden kuvaajat elementin alueella on esitetty kuvassa 9.



**Kuva 9** *Hermiten polynomit.*

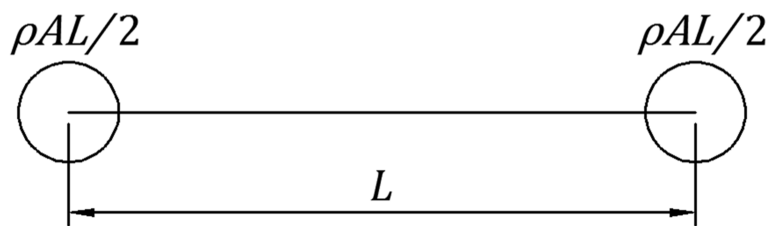
Kun rakenteen kaikille elementeille on määritetty elementtikohtaiset jäykkyyismatriisit, tulee ne koota yhteen niin sanotuksi globaaliksi jäykkyyismatriisiksi, jonka tunnus on **K** [2, s. 311-313]. Tämä matriisi siis kuvaa koko rakenteen kaikkien solmujen siirtymi- en ja voimien suhdetta. Kun solmuun liittyy useampi kuin yksi elementti, on kaikkien näiden elementtien jäykkyyssominaisuudet huomioitava solmun vapausasteiden jäyk- kyyksien laskennassa. Käytännössä jokaista solmun vapausastetta koskeva kokonais- jäykkyys saadaan, kun kaikkien siihen liittyvien elementtien kuhunkin vapausasteeseen vaikuttavat jäykkyysskertoimet lasketaan yhteen. Jotta globaali jäykkyyismatriisi voitai- siin koota, täytyy koko rakenteen vapausasteet ensin numeroida. Numerot kannattaa valita tarkoituksenmukaisesti, koska vapausasteiden järjestys voi vaikuttaa laskennan tehokkuuteen.

Globaaleilla jäykkyyismatriiseilla on useita ominaisuuksia, jotka ovat aina voimassa ja joita voidaan hyödyntää ominaisarvotehtävän ratkaisemisessa [13, s. 61]. **K** on esimer- kiksi aina neliömatriisi, jossa on yhtä monta riviä ja saraketta kuin systeemillä on vapa- usasteita. Toisaalta kuten kaavassa (39) on todettu, elementtikohtainen jäykkyyismatriisi on aina symmetrinen, ja sama sääntö pätee myös koko rakenteen jäykkyyttä kuvaavalle matriisille. Tiedetään myös, että globaali jäykkyyismatriisi on niin sanottu nauhamatriisi eli lävistäjän ympärille muodostuu nauha, jonka ulkopuolella olevat alkioit ovat nollia. Vapausasteiden numerojärjestys, rakennesysteemin monimutkaisuuden lisäksi, voikin vaikuttaa matriisin rakenteeseen eli sen nauhan leveyteen ja siten laskentanopeuteen. Jos systeemissä ei ole mekanismeja eikä jäykän kappaleen liikettä pääse syntymään, **K** on positiivisesti definiitti, jolloin kaikki sen ominaisarvot ovat nollasta poikkeavia [14, s. 385].

### 2.6.3 Keskitetty ja konsistentti massamatriisi

Koska systeemin dynaaminen käyttäytyminen riippuu merkittävästi syntyvistä hitausvoimista eli käytännössä massasta, on tärkeää tietää, miten massa on rakenteessa jakautunut. Voidaan esimerkiksi olettaa, että massa on tiivistynyt erillisiin pisteisiin, jolloin vain niissä syntyy hitausvoimia ja tilanne on helppo analysoida [1, s. 4-5]. Lisäksi on esitetty, että tilanteissa, joissa suuri osa systeemin massasta on keskittynyt erillisiin pisteisiin, kuten koneiden sijaintikohtiin, voidaan myös muiden osien massat lisätä näihin pisteisiin. Tällöin itse rakenne voidaan analyysivaiheessa olettaa massattomaksi tarkkuuden juurikaan kärsimättä. Jos taas oletetaan, että massa on jakautunut tasaisesti koko elementin alueelle, systeemillä on ääretön määrä vapausasteita ja laskenta on hitaampaa [1, s. 4-7]. Kun värähtelyn analysointiin käytetään elementtimenetelmää, massan jakautumista kuvataan joko keskitetyllä tai konsistentilla massamatriisilla.

Kun oletetaan, että elementin massa on jakautunut tasan siirtymävapausasteiden kesken, syntyvää matriisia kutsutaan keskitetyksi massamatriisiksi [1, s. 184-185]. Esimerkiksi palkkielementillä on tällöin yhtä suuret pistemassat sen solmuissa eli palkin kummassakin päässä kuvan 10 mukaisesti.



*Kuva 10 Palkkielementin keskitetty massajakauma.*

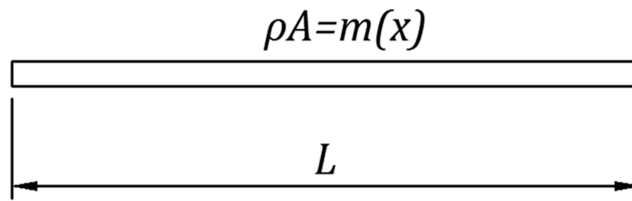
Vastaavasti kuin jäykkyysmatriisia määritettäessä, massamatriisin kertoimet  $m_{ij}$  kuvaavat, kuinka suuri hitausvoima aiheutuu vapausasteeseen  $i$ , kun koordinaatilla  $j$  on yhden yksikön suuruinen kiihtyvyys ja muissa vapausasteissa kiihtyvyys on nolla [2, s. 315]. Koska massapisteen kiihtyvyys aiheuttaa hitausvoimaa vain kyseisessä pisteessä, keskitetty massamatriisi on aina diagonaalimatriisi [1, s. 184-185]. Siirtymävapausasteeseen liittyvä massamatriisin kerroin on siten yhtä suuri kuin pisteeseen keskittynyt massa. Lähteessä [1] todetaan, että jos solmupisteellä on useampi kuin yksi siirtymävapausaste, niihin liittyvien massojen ajatellaan olevan keskenään yhtä suuret. Kiertymävapausasteilla ei sen sijaan oleteta olevan massaa lainkaan, koska pistemäisellä massalla ei ole pyörimishitautta. Kiertymistä vastaavat alkioit keskitetyssä massamatriisissa ovat siten nollia. Kiertymävapausasteisiin on kuitenkin mahdollista lisätä hitauden vaikutus laskemalla elementin osan, kuten palkin puolikkaan, hitausmomentti solmupisteen ympäri [2, s. 314]. Keskitetty massamatriisi neljän vapausasteen venymättömälle palkkielementille, kun pyörimishitautta ei ole huomioitu, on



$$\mathbf{m}_L^e = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

jossa  $\rho$  on materiaalin tiheys ja  $A$  on elementin pinta-ala [8, s. 13].

Konsistentti massamatriisi kuvaa elementin alueelle tasaisesti jakautunutta massaa, kuten on esitetty kuvassa 11. Palkkielementin konsistentti massamatriisi voidaan siten johtaa käyttäen vastaavaa menetelmää kuin jäykkyysmatriisin määrittämisessä, jolloin interpolointifunktioiksi soveltuvat samat Hermiten polynomit ja kertoimen  $m_{ij}$  kaava voidaan määrittää virtuaalisen työn periaatteella [1, s. 185-187].



**Kuva 11** Palkkielementin konsistentti massajakauma.

Sisäisen työn tiedetään olevan elementin massan, kiihtyvyyden ja siirtymän tulo sen jokaisessa pisteessä, jolloin massamatriisin kertoimiksi muotofunktioiden avulla ilmoitettuna saadaan

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx. \quad (46)$$

Jäykkyysmatriisin tavoin myös konsistentti massamatriisi on symmetrinen eli

$$m_{ij} = m_{ji}, \quad (47)$$

koska massamatriisin alaindeksien vaihtuessa keskenään ainoastaan kaavan (46) interpolointifunktioiden järjestys vaihtuu, mutta tulos pysyy samana [2, s. 317]. Kun massamatriisin kertoimet ratkaistaan kaavan (46) mukaisesti neljän vapausasteen venymättömälle palkkielementille, saadaan konsistentiksi massamatriisiksi

$$\mathbf{m}_c^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

[1, s. 185-187].

Sekä keskitetty (45) että konsistentti (48) massamatriisi on muodostettu venymättömälle palkkielementille, jolla ei ole vapausasteita pituusakselinsa suunnassa. Jos palkkiele-

mentti sijaitsee rakenteessa kuitenkin siten, että se pääsee liikkumaan akselinsa suuntaisesti, tulee elementin kyseistä liikettä vastaava hitaus huomioida [1, s. 189]. Käytännössä tämä tehdään lisäämällä jäykän kappaleen massa eli palkkielementin kokonaismassa kyseiseen vapausasteeseen. Lähteen [1] mukaan elementin liikkuesssa akselinsa suunnassa, se toimii käytännössä jäykkänä kappaleena, eikä kimmovoimia synny. Tämä vapausaste ei siten aiheuta lisätermiä elementin jäykkyysmatriisiin. Luvun 2.7 laskuesimerkissä esitetään, miten massamatriisissa huomioidaan palkin akselin suuntainen liike.

Kuten jäykkyysmatriisit, myös elementtien lokaalit massamatriisit on koottava yhteen globaaliksi massamatriisiksi  $\mathbf{M}$ , jolloin koko rakenteen massajakauma saadaan selville. Solmun vapausasteiden massoihin vaikuttavat kaikkien solmuun liittyvien elementtien massat [1, s. 184]. Keskityn massamatriisin solmupisteen kokonaismassa saadaan siis summaamalla kaikkien siihen liittyvien elementtien massoista solmulle osoitetut osuudet. Elementtien konsistentit massamatriisit taas yhdistetään samalla periaatteella kuin jäykkyysmatriisit [1, s. 187]. Vapausasteen massa on siten kaikkien solmuun liittyvien elementtien kyseiseen vapausasteeseen vaikuttavien massamatriisin kertoimien summa. Lähteessä [1] myös todetaan, että kun koko rakenteen massamatriisi on koottu konsistenteista matriiseista, syntyvän globaalien massamatriisin rakenne on sama kuin jäykkyysmatriisilla eli matriiseiden nolasta poikkeavat termit ovat järjestäytyneet samalla tavalla.

Massamatriiseilla on globaalien jäykkyysmatriisin tavoin ominaisuuksia, jotka kaikki matriisit toteuttavat [1, s. 187]. Massamatriisi, kuten jäykkyysmatriisikin, on esimerkiksi aina symmetrinen riippumatta siitä, onko se keskitetty tai konsistentti. Kuten aikaisemmin on todettu, rakenteen konsistentti massamatriisi on myös rakenteeltaan samanlainen kuin sen jäykkyysmatriisi, jolloin sen on oltava samankokoinen neliömatriisi. Toisaalta on myös havaittu, että keskitetyllä massamatriisilla on yhtä paljon rivejä ja sarakkeita kuin rakenteen jäykkyysmatriisilla, vaikka sen alkioiden järjestäytyminen ei muuten vastaa jäykkyysmatriisin rakennetta. Massamatriiseiden definiittisyydestä tiedetään, että massajakauman ollessa konsistentti massamatriisi on aina positiivisesti definiitti [14, s. 382]. Keskitetyn matriisin lävistäjällä puolestaan on usein nolla-alkioita kiertymävapausasteista johtuen, jolloin matriisi on semidefiniitti. Cookin [14] mukaan keskitetty matriisi voi olla myös indefiniitti. Silloin matriisin diagonaalille on laskennallisista toimenpiteistä johtuen syntynyt negatiivisia massatermejä, mikä merkitsisi käytännössä sitä, että liike-energia olisi arvoltaan negatiivinen.

Kun käytetään keskitettyä massajakaumaa, analyysi huomioi vain systeemissä tapahtuvat siirtymät, jolloin tarvittavia vapausasteita on vähemmän [1, s. 196]. Myös elementin ominaisuuksien määrittäminen on yksinkertaista, ja syntyvä globaali matriisi on diagonaaliuotoinen. Konsistentissa massamatriisissa on sen sijaan enemmän termejä, sillä se huomioi sekä siirtymä- että kiertymävapausasteet, ja alkioita on myös lävistäjän ulkopuolella. Lähteessä [1] on todettu, että näistä seikoista johtuen keskitetty matriisi on helpompi muodostaa, se tarvitsee vähemmän muistia ja laskennallinen analyysi on yk-

sinkertaisempi. Toisaalta saman lähteen mukaan konsistentti massamatriisi johtaa yleensä tarkempiin tuloksiin, mutta koska kiertymävapausasteiden merkitys on analyysin kannalta paljon pienempi kuin siirtymien, tulosten tarkkuus ei välttämättä parane huomattavasti.

Koska keskitetyn ja konsistentin massamatriisin ominaisuudet eroavat toisistaan, ne myös soveltuvat paremmin eri tilanteisiin [14, s. 383]. On todettu, että konsistentti massamatriisi tuottaa yleensä tarkempia tuloksia taivutusta käsittelevissä ongelmissa eli kun tutkitaan esimerkiksi palkkeja tai laattoja. Useimmiten sen käyttö johtaa myös todellista korkeampiin ominaistajuuksiin. Sen sijaan keskitetty matriisi arvioi ominaistajuuDET todellisia pienemmiksi ja antaa konsistenttia matriisia tarkempia tuloksia, kun analysoidaan aaltoliikkeen etenemistä.

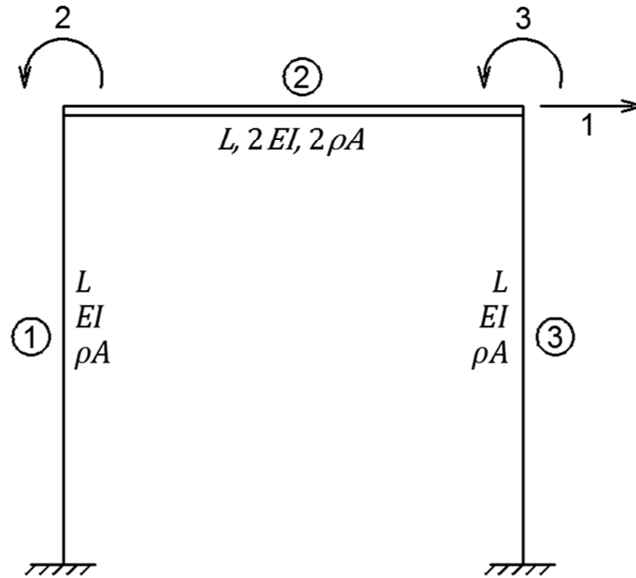
Matriisityyppien tehokkuuden vertailu ei ole täysin suoraviivaista, koska käytettävä ratkaisualgoritmi vaikuttaa siihen, kuinka paljon keskitetty matriisi on konsistenttia taloudellisempi [14, s. 382-383]. Toisaalta laskennan tehokkuusvaatimukset myös riippuvat siitä, mitä analysoidaan. Jos esimerkiksi tutkitaan rakenteen vastehistoriaa, muistin säästäminen ja laskennan tehokkuus on tärkeää, koska käsiteltävää dataa on paljon. Jos taas tehdään yksinkertaista värähtelyanalyysia eli esimerkiksi määritetään rakenteen ominaistajuuDET, voidaan laskelmat suorittaa kohtuullisessa ajassa, vaikka yksittäisen elementin käsittely veisikin suhteellisen paljon kapasiteettia. Lähteessä [14] on myös todettu, että joitakin ratkaisualgoritmeja käytettäessä massamatriisin lävistäjällä olevat nollatermit voivat hankaloittaa laskentaa tai tehdä sen mahdottomaksi.

Yksi tapa yksinkertaistaa laskentaa on vähentää rakenteen vapausasteiden määrää. Kun käytetään konsistenttia massamatriisia, kaikki siirtymä- ja kiertymävapausasteet tulee sisällyttää analyysiin [1, s. 187]. Jos taas kyseessä on keskitetty massamatriisi eli kiertymävapausasteiden hitautta ei huomioida, nämä vapausasteet voidaan tiivistää pois myös jäykkyysmatriisista. Tämä tehdään käyttämällä staattista tiivistämistä, jolloin rotaatiovapausasteet tiivistetään pois niin, että systeemin staattinen ratkaisu pysyy tarkkana [8, s. 9]. Menetelmän tarkoituksena on erotella ne vapausasteet, joissa voi syntyä hitausvoimia, niistä, joissa hitausvoimia ei muodostu, eli käytännössä siirtymä- ja kiertymävapausasteet [1, s. 296-297]. Tulee kuitenkin huomioida, että vaikka staattisella tiivistämisellä voidaan vähentää rakenteen vapausasteita merkittävästi, se ei välttämättä johda nopeampaan laskentaan, koska tiivistämättömän jäykkyysmatriisin pieni nauhaleveys mahdollistaa tehokkaiden ratkaisutekniikoiden käytön.

## 2.7 Laskuesimerkki: ominaisarvot ja -vektorit

Tarkastellaan kuvan 12 mukaista kehää, joka on jaettu kolmeen elementtiin: 1,2 ja 3. Kaikki kehän sauvat ovat yhtä pitkiä, ja vaakasauvan massa sekä taivutusjäykkyys ovat kaksinkertaisia pystysauvoihin nähden. Oletetaan, että sauvat ovat venymättömiä, jol-

loin rakenteella on kolme vapausastetta: yksi vaakasuuntainen siirtymä ja kaksi kiertymävapausastetta kehän nurkissa.



**Kuva 12** Kolmeen elementtiin jaettu yksiaukkoinen kehä.

Kootaan jokaiselle elementille lokaali jäykkyysmatriisi käyttäen aiemmin esiteltyä neljän vapausasteen palkkielementtiä, jonka jäykkyysmatriisi on kaavan (40) mukainen. Selkeyden vuoksi vaakasuuntaisen elementin jäykkyysmatriisiin on lisätty nollatermit akselin suuntaiselle siirtymävapausasteelle.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_1 &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{bmatrix} & \mathbf{k}_2 &= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} \\ 4L^2 & 2L^2 & 0 \\ 2L^2 & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{1} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{k}_3 &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{49}$$

Elementtien massamatriisit kootaan samalla periaatteella kuin jäykkyysmatriisit mutta käyttäen kaavaa (48). Koska vaakapalkki pääsee liikkumaan pituusakselinsa suuntaisesti, tulee sitä vastaavan elementin massamatriisiin, vaakasuuntaiselle vapausasteelle, lisätä koko palkin massa. Näin huomioidaan jäykän kappaleen hitaus, joka aiheutuu palkin akselin suuntaisesta liikkeestä.

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_1 &= \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ 156 & 22L \\ 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{bmatrix} & \mathbf{m}_2 &= \frac{2\rho AL}{420} \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} \\ 4L^2 & -3L^2 & 0 \\ -3L^2 & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{m}_3 &= \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ 156 & 22L \\ 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (50)$$

Koko rakenteen vapausasteita vastaavat numerot on merkitty laatikoituina jäykkyys- ja massamatriisien yläpuolelle ja viereen, jolloin kuhunkin vapausasteeseen vaikuttavat termit on helppo havaita. Globaali jäykkyys- ja massamatriisi saadaan yhdistämällä jokaisen elementin kuhunkin vapausasteeseen vaikuttavat jäykkyyskertoimet ja massat, jolloin saadaan tulokseksi

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 24 & 6L & 6L \\ 6L & 12L^2 & 4L^2 \\ 6L & 4L^2 & 12L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{bmatrix} \quad (51)$$

ja

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1152 & 22L & 22L \\ 22L & 12L^2 & -6L^2 \\ 22L & -6L^2 & 12L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Kaavan (33) mukaisesti kyseessä on kahden matriisin ominaisarvotehtävä, jonka ratkaisua etsitään karakteristisen yhtälön (34) avulla. Karakteristisen yhtälön ratkaisuna saadaan kolme ominaisarvoa eli ominaiskulmataajuuksien toiset potenssit, joista ratkaistaan edelleen ominaistajuudet kaavan (10) avulla:

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho AL^4} \begin{Bmatrix} 7,30 \\ 186,67 \\ 11267,96 \end{Bmatrix} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \begin{Bmatrix} 2,70 \\ 13,66 \\ 35,61 \end{Bmatrix} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \begin{Bmatrix} 0,43 \\ 2,17 \\ 5,67 \end{Bmatrix} \quad (53)$$

Ominaisvektorit ratkaistaan sijoittamalla ominaisarvot yksittellen yhtälöön (35), jonka jälkeen vektorit normeerataan asettamalla yhden komponentin arvoksi yksi. Loput vektorin alkioit saadaan ratkaistua yhtälöryhmän minkä tahansa kahden rivin perusteella. Kun alin ominaisarvo sijoitetaan lausekkeeseen (35), saadaan kolme yhtälöä:

$$\begin{aligned}
3,97\phi_1 + 5,62L\phi_2 + 5,62L\phi_3 &= 0 \\
5,62L\phi_1 + 11,79L^2\phi_2 + 4,10L^2\phi_3 &= 0 \\
5,62L\phi_1 + 4,10L^2\phi_2 + 11,79L^2\phi_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

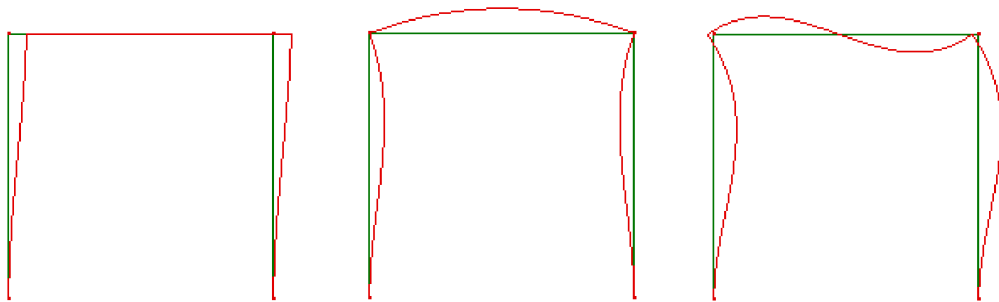
Normeerataan vektorin ensimmäisen komponentin arvoksi yksi ja ratkaistaan loput alkio kahden ylimmän yhtälön avulla, jolloin ensimmäistä ominaistaajuutta vastaava ominaisvektori on

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,35/L \\ -0,35/L \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Toista ja kolmatta ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit saadaan muuten samalla tavalla, mutta vektorin suurimman alkion arvoksi asetetaan yksi, jolloin ominaisvektorit ovat:

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} L \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} L. \tag{56}$$

Ominaisvektoreiden perusteella voidaan hahmotella rakenteen kaikkia ominaistaajuuksia vastaavat ominaismuodot, jotka on esitetty kuvassa 13.



**Kuva 13** Kehän ominaismuodot alimmasta korkeimpaan.

Ominaisvektoreiden kaavoista voidaan päätellä, että alimmassa ominaismuodossa palkki liikkuu lähinnä vaakasuunnassa nurkkien kiertymien ollessa hyvin pienet. Toisessa ja kolmannessa ominaismuodossa puolestaan kiertymät ovat suuret vaakasiirtymään verrattuna. Kun lisäksi huomioidaan kehänurkkien kiertymien suunnat, havaitaan, että kuvan 13 taipumamuodot vastaavat määritettyjä ominaisvektoreita.

### 3 SÄILIÖ, SEN SISÄLTÖ JA TUKIRAKENNE

Säiliö, sen sisältö sekä tukirakenne muodostavat yhdessä systeemin, johon voimat, kuten dynaamiset herätteet, vaikuttavat. Systeemin eri osien ominaisuudet ja niiden välinen vuorovaikutus voivat vaikuttaa rakenteen käyttäytymiseen huomattavasti. Esimerkiksi korotetun säiliön mitoittamisessa täytyy huomioida sekä säiliössä olevan aineen liike suhteessa säiliöön että säiliön liike suhteessa maahan [15]. Tilanteen tarkka mallintaminen voi olla hankalaa ja aikaa vievää, minkä takia sitä kannattaa yksinkertaistaa siten, että riittävän tarkat tulokset saavutetaan kohtuullisella työmäärällä. Erityisesti jos säiliön halkaisija on hyvin suuri, säiliön sisällön ominaisuuksilla voi olla suuri vaikutus dynaamiseen vasteeseen, jolloin on suositeltavaa käyttää konservatiivisia oletuksia [15].

Säiliön ja sen sisällön lisäksi myös tukirakenteen ominaisuudet vaikuttavat systeemin käyttäytymiseen huomattavasti. Tässä työssä käsiteltävä teräksinen tukirakenne koostuu toisiinsa liitetyistä kehistä. Näin ollen koko systeemin ominaistaajuudet ja -muodot sekä dynaamiset vasteet riippuvat esimerkiksi kehärakenteiden jäykistyksestä [16]. Toisaalta systeemin dynaamisiin ominaisuuksiin voivat vaikuttaa merkittävästi myös sen vaimennuskapasiteetti sekä kehien oletettu tuentatapa eli käytännössä se, miten maaperän, peruspilareiden ja perustusliitosten ominaisuudet otetaan laskelmissa huomioon [12, s. 96; 17].

#### 3.1 Säiliön sisällön vaikutus

Rakenteen jäykkyyden ja massan lisäksi säiliösystemin dynaamiseen käyttäytymiseen vaikuttaa myös säiliön sisällä olevan aineen koostumus. Näin ollen materiaalin ominaisuuksista riippuu, millä tavalla kokonaisuus tulee mallintaa. Jos aine on nestemäistä, osa nesteestä liikkuu samassa tahdissa säiliön kanssa, mutta pinnalle syntyy aaltoliikettä, jonka taajuus on säiliön taajuutta matalampi [15]. Jos säiliön sisällä oleva neste mallinetaan kiinteänä aineena, eikä nesteen ja säiliön välistä vuorovaikutusta huomioida, tukirakenteeseen syntyvät rasitukset voivat olla huomattavasti todellisia suurempia ja systeemin jaksonaika on pienempi. Jos taas säiliössä oleva aine on rakeista, lähes koko sisältö liikkuu säiliön kanssa yhtenä kappaleena eikä pintakerroksen matalampitaajuisia liikettä juuri tapahdu.

Aina ei voida määrittää tarkasti, onko tutkittava materiaali nestettä vai kiinteää ainetta. Esimerkiksi aineen viskositeetti vaikuttaa siihen, käyttäytyykö se nesteen tavoin dynaamisesti kuormitettuna. Jos viskositeetti on alle 10 Pa·s, aineen hydrodynaamiset vaikutukset ovat lähes samanlaisia kuin viskoosittoman nesteen, jolloin myös sille kehitetyt teoriat ja kaavat ovat voimassa [18, s. 4–2, B–1–B–4]. Kun materiaalin viskositeetti on

yli kyseisen rajan, sen vaimennuskyky on huomattavasti viskoositonta nestettä parempi, mistä johtuen pinnan aaltoliikkeen osuus vähenee ja säiliön sisältö täytyy kuvata jollakin toisella mallilla. Lisäksi dynaamiseen käyttäytymiseen vaikuttaa säiliössä olevan materiaalin mahdollinen epähomogeenisuus [15]. Jos säiliön sisältö on jakautunut siten, että pohjalla on kiinteää ja pinnalla nestemäistä ainetta, voidaan lähteen [15] mukaan olettaa, että tietyn rajan alapuolella oleva osuus liikkuu yhdessä säiliön kanssa ja pintakerroksille sovelletaan nesteille johdettua teoriaa. Epäjohdonmukaisesti kerrostuneille aineille on myös kehitetty laskukaavoja, jotka huomioivat kerrosten erilaiset ominaisuudet dynaamisten vaikutusten laskennassa. Sisällön ominaisuuksien lisäksi systeemin käyttäytymiseen vaikuttavat muun muassa säiliön mittasuhteet ja systeemiin kuuluvien komponenttien vaimennuskapasiteetit.

### 3.1.1 Nestemäiset aineet

Kun nestesäiliöön vaikuttaa dynaaminen herätevoima, neste kohdistaa säiliön seiniin hydrostaattisen paineen lisäksi hydrodynaamisen paineen [15]. Tällaisessa tapauksessa nesteen dynaamisten vaikutusten tarkka laskenta on haastavaa ja aikaa vievää, vaikka käytössä olisi tarkoitukseen kehitetty tietokoneohjelma [19, s. 43]. Siksi nesteen aiheuttamia voimia kannattaa tutkia yksinkertaisemmalla mallilla, kuten lineaarisella mekaanisella systeemillä. Jos suljettu säiliö on täynnä nestettä tai se on tyhjä, systeemi käyttäytyy Dodgen [19] mukaan samoin kuin yksimassainen jäykkä kappale. Jos taas neste pääsee liikkumaan säiliössä, syntyy sen pinnalle dynaamisen herätteen seurauksena aaltoliikettä, jolla on yksi tai useampi ominaistaajuus. Tällaista tilannetta ei ole mahdollista kuvata yhden jäykän kappaleen avulla, vaan osan massasta on voitava värähdellä.

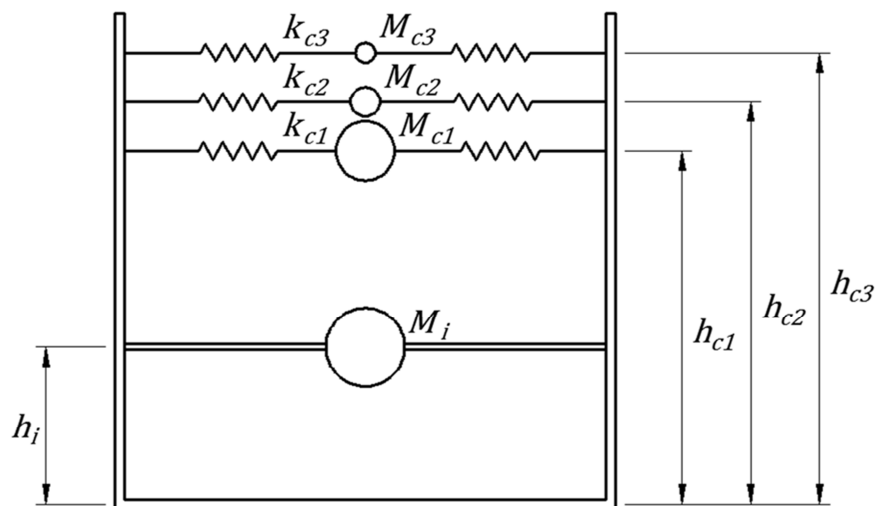
Esimerkiksi Housner on kehittänyt teoriaa ja yksinkertaisia laskentakaavoja jäykkien nestesäiliöiden ekvivalentin jousi-massa-analogian perustaksi [4; 3]. Myöhemmin muun muassa Haroun ja Housner sekä Veletsos ovat muokanneet tästä teoriasta myös joustaville säiliöille soveltuvan mallin [20]. Housnerin kehittämä menetelmä [4] vastaa tarkkuudeltaan monimutkaisempia menetelmiä, mutta se on matemaattisesti yksinkertaisempi ja toisaalta havainnollistaa hyvin nesteen liikettä. Teoria perustuu niin sanottuun lamelliteoriaan, jossa sylinterimäinen säiliö on jaettu osiin kuvitteellisilla kalvoilla ja kokoonpuristumattoman nesteen siirtymien oletetaan olevan pieniä. Housnerin johtamat kaavat antavat melko tarkkoja tuloksia, jos pinnan korkeuden  $h$  suhde säiliön säteeseen  $R$  on suuri, mutta yliarvioivat seiniin kohdistuvan paineen matalien ja leveiden säiliöiden tapauksessa. Toisaalta jos korkeuden suhde säteeseen on suurempi kuin 1,5, kannattaa teorian mukaisia kaavoja soveltaa vain nesteen yläosaan syvyydelle  $1,5R$  asti ja olettaa, että kyseisen rajan alapuolella oleva neste toimii jäykkänä kappaleena säiliön kanssa.

Teorian mukaan nesteen hydrodynaaminen paine säiliön seiniä vasten voidaan jaotella kahteen erilliseen osaan, impulsiiviseksi ja konvektiiviseksi, kun säiliö heilahtelee vaa-



kasuunnassa [18, s. 4–4]. Impulsiivinen osa on suoraan verrannollinen säiliön liikkeen ja se toteuttaa reunaehdot säiliön reunoilla sekä pohjassa, mutta olettaa virheellisesti, että paine on nolla alkuperäisen vapaan pinnan korkeudella. Koska säiliön seinien liike herättää nesteen pinnan heilahtelemaan, liikkuva neste aiheuttaa seiniin dynaamisia voimia. Tätä ilmiötä kuvataan konvektiivisella komponentilla, joka korjaa reunaehdon nesteen pinnalla oikeaksi eli huomioi aaltoliikkeen vaikutuksen. Nesteen pinnalle voi syntyä useita aaltoilumuotoja, joilla on eri ominaistajuuudet. Lähteessä [18] kuitenkin huomautetaan, että korkeampien värähtelymuotojen vaikutus on yleensä merkityksetön ja hyvä arvio hydrodynaamisista kokonaisvaikutuksista saadaan, kun konvektiivisista komponenteista huomioidaan ainoastaan matalimman taajuuden värähtelymuoto. Tämän yksinkertaistuksen takia impulsiivisen ja konvektiivisen massan summa ei välttämättä ole yhtä suuri kuin nesteen kokonaismassa, vaikka näin tulisi teoriassa olla [15].

Säiliön ja sen sisällä olevan nesteen muodostama systeemi voidaan esittää säiliöön kiinnitetyn ekvivalentin impulsiivisen massan  $M_i$  ja konvektiivisten massojen  $M_c$  avulla kuvan 14 mukaisesti [4].



**Kuva 14** Dynaamisesti kuormitetun nestesäiliön ekvivalentti systeemi (perustuu lähteeseen [4]).

Jotta rakenne voidaan jakaa riippumattomiksi mekaanisiksi systeemeiksi, tulee konvektiivisen komponentin jaksonajan olla huomattavasti pidempi kuin impulsiivisen, koska tällöin konvektiivinen massa värähtelee itsenäisesti eikä rakenteen oma värähtely vaikuta nesteen pinnan heilahteluun. [15; 21, s. 34]. Sille, mikä jaksonaikojen suhteen tulee olla, on olemassa erilaisia raja-arvoja. Lähteen [22, s. 157] mukaan nesteen ja rakenteen välinen vuorovaikutus eli nesteen pinnan aaltoilu voidaan huomioida, kun

$$T_c \geq 3 \cdot T, \quad (57)$$

jossa  $T_c$  on konvektiivisen komponentin jaksonaika. Jaksonaika  $T$  on laskettu koko säiliölle tukirakenteineen siten, että säiliö ja sen sisältö toimivat yhdessä jäykkänä kappaletena.

### 3.1.2 Impulsiivinen komponentti

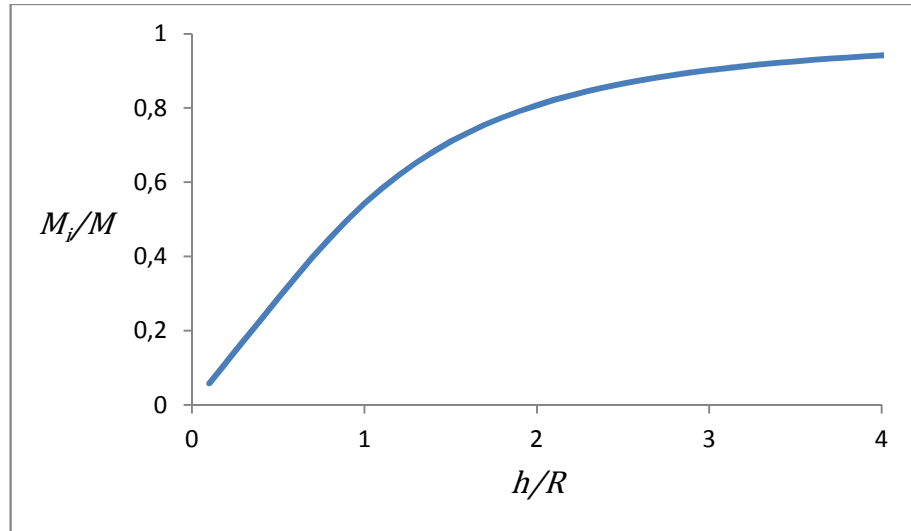
Kun säiliöön vaikuttaa vaakasuuntainen dynaaminen heräte, osa nesteestä liikkuu säiliön seinien kanssa samassa tahdissa. Nesteen liike aiheuttaa painetta, joka vaikuttaa säiliön alaosassa, ja tätä vaikutusta vastaa hydrodynaamisen paineen impulsiivinen komponentti [15]. Impulsiivisen paineen osuus on konvektiivista suurempi, minkä takia se on analyysin kannalta kriittisempi [18, s. 4–39]. On myös huomattava, että koska impulsiivinen komponentti heilahtelee samalla taajuudella säiliön kanssa, säiliön seinien joustavuus voi vaikuttaa sen ominaisuuksiin huomattavasti.

Tarkastellaan sylinterimäisessä pystysuuntaisessa säiliössä olevaa nestettä Housnerin lamelliteorian [4] avulla. Kun säiliöllä on vaakasuuntaista kiihtyvyyttä, nesteen ajatellaan puristuvan kasaan pystysuuntaisten jäykkien kalvojen välissä. Tämä aiheuttaa koonpuristumattomalle nesteelle pystysuuntaisen kiihtyvyyden, mutta vaakatasossa liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa nesteen kiihtyvyys on todistettusti nolla. Nesteellä on siten vain liikkeen suuntaista sekä pystysuuntaista kiihtyvyyttä. Tämän teorian perusteella saadaan johdettua nesteen paineelle ja kiihtyvyydelle laskentakaavat, jotka ovat voimassa, kun nesteen siirtymät oletetaan pieniksi.

Kun nesteen aiheuttama paine tiedetään, voidaan sen perusteella määrittää säiliön seinään kohdistuva kokonaisvoima [4]. Tämän voiman vaikutus on yhtä suuri kuin säiliön seiniin jäykästi kiinnitetyllä ekvivalentilla impulsiivisella massalla  $M_i$ , joka heilahtelee säiliön kanssa samassa tahdissa. Impulsiivinen massa on määritetty lähteessä [4] seuraavasti:

$$M_i = M \frac{\tanh\left(\sqrt{3}\frac{R}{h}\right)}{\sqrt{3}\frac{R}{h}}, \quad (58)$$

jossa  $M$  on nesteen kokonaismassa,  $R$  on säiliön säde ja  $h$  nestepinnan korkeus. Kuvassa 15 on esitetty impulsiivisen massan kehitys, kun säiliön mittasuhteet muuttuvat. Kuvasta havaitaan, että hoikille säiliöille impulsiivisen massan osuus on lähes yhtä suuri kuin nesteen kokonaismassa.

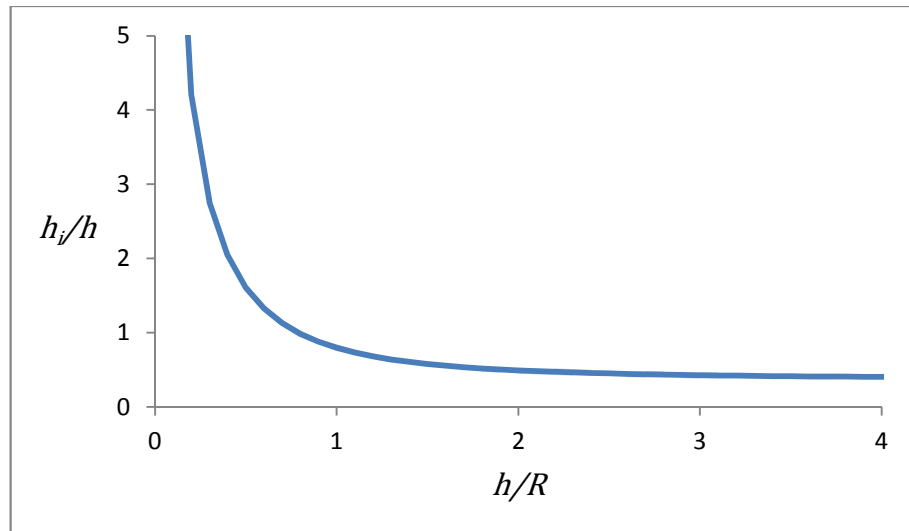


**Kuva 15** Impulsiivisen massan riippuvuus säiliön mittasuhteista.

Jotta ekvivalentin impulsiivisen massan aiheuttama taivutusmomentti säiliön pohjan suhteen olisi yhtä suuri kuin todellisesta nesteen paineesta aiheutuva momentti, tulee massan sijaita tietyllä etäisyydellä  $h_i$  säiliön pohjasta [4]. Tämä etäisyys riippuu siitä, lasketaanko kokonaismomentti säiliön pohjan ylä- vai alapuolella. Kun määritetään taivutusmomenttia pohjan alapuolella, tulee seinien paineen lisäksi ottaa huomioon myös säiliön pohjaan kohdistuva paine, jolloin Housnerin [4] mukaan  $h_i$ :n lauseke on

$$h_i = \frac{3}{8}h \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{\sqrt{3} \frac{R}{h}}{\tanh\left(\sqrt{3} \frac{R}{h}\right)} - 1 \right) \right]. \quad (59)$$

Kuvasta 16 nähdään, että leveälle ja matalalle säiliölle  $h_i$ :n arvo on hyvin suuri. Tämä johtuu siitä, että leveässä säiliössä pohjaan kohdistuvan paineen osuus on suhteessa suurempi kuin kapeassa säiliössä, jolloin myös momenttivarsi ja taivutusmomentti kasvavat. Toisaalta kuvasta havaitaan myös, että kun säiliö kapenee, impulsiivisen komponentin vaikutuskorkeus lähestyy nesteen pinnan korkeuden puoliväliä.



**Kuva 16** Impulsiivisen massan vaikutuskorkeuden riippuvuus säiliön mittasuhteista.

Jos säiliö voi vaakasuuntaisen liikkeen lisäksi kallistua vaaka-akselin ympäri, tulee sille määrittää hitausmomentti. On esitetty, että jos säiliösystemiä tutkitaan ekvivalentilla mekaanisella mallilla, hitausmomentin vaikutus lisätään samaan impulsiivisen pistemassan kohdalle [19, s. 44-50]. Dodgen [19] mukaan nestettä sisältävän säiliön hitausmomentti on vain osa vastaavan jäykän umpisylinterin hitausmomentista ja sen arvo voidaan määrittää esimerkiksi kuvaajan tai taulukon avulla. Kuitenkin jos nesteen vaimennuskapasiteetti kasvaa, nestesäiliön hitausmomentin arvo lähestyy jäykän umpisylinterin tapausta.

### 3.1.3 Konvektiivinen komponentti

Kun säiliön seiniä poikkeutetaan, säiliön sisällä oleva neste herää värähtelemään aiheuttaen painetta säiliön seiniin ja pohjaan. Tätä nesteen värähtelyä kuvataan hydrodynaamisen paineen konvektiivisella komponentilla [4]. Aaltoliikettä, joka aiheuttaa konvektiivisia voimia, syntyy nesteen pinnalla ja sillä voi olla useita ominaismuotoja [21, s. 34-35]. Alimman ominaismuodon sanotaan olevan näistä kuitenkin selvästi merkittävin, koska sen aiheuttama hydrodynaaminen paine on muita muotoja suurempi. Toisaalta on myös todettu, että konvektiivisen komponentin alimman ominaistajajuuden jaksonaika on yleensä paljon pidempi kuin impulsiivisen, minkä takia konvektiivinen paine on impulsiivista pienempi. Aaltoliikkeen pitkästä jaksonajasta johtuen säiliön seinämien joustavuus ei myöskään vaikuta sen aiheuttamiin paineisiin merkittävästi, joten tulokset ovat konvektiivisen komponentin osalta riittävän tarkkoja, vaikka säiliön seinämien joustavuutta ei huomioitaisi [18, s. 4-5].

Tarkastellaan jälleen sylinterimäistä säiliötä lamelliteorian avulla. Kun tutkitaan nesteen ensimmäistä värähtelymuotoa, neste jaetaan vaakasuuntaisiin lamelleihin, jotka pääsevät kiertymään vapaasti [4]. Sopivien oletuksien avulla voidaan johtaa kaavat värähtelyn alimmalle ominaistajajuudelle ja kiertymävasteelle, sekä värähtelyn aiheuttamalle

paineelle. Pyöreälle sylinterimäiselle säiliölle alimmaksi ominaiskulmataajuudeksi  $\omega_1$  on lähteessä [4] saatu

$$\omega_1^2 = \frac{g}{R} \sqrt{\frac{27}{8}} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}\right), \quad (60)$$

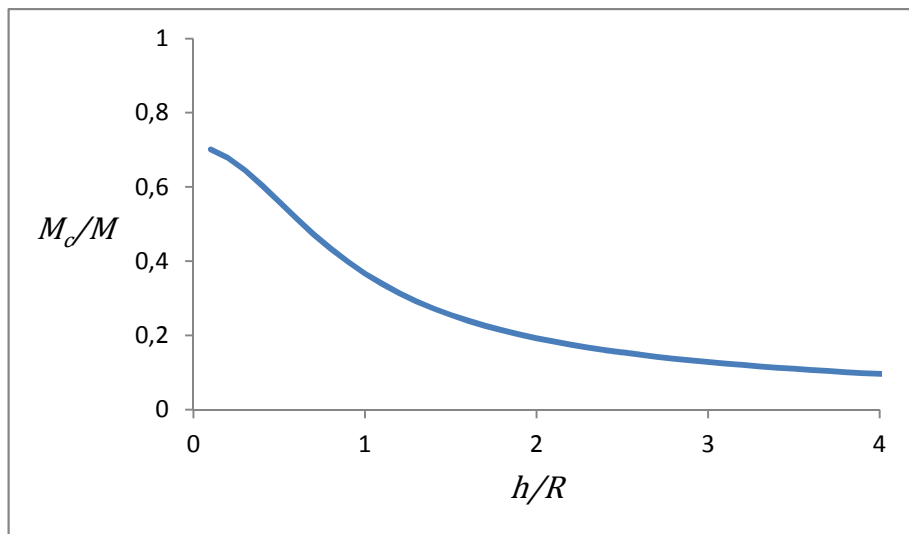
jossa  $g$  on painovoiman kiihtyvyys. Seinään kohdistuvan paineen ja edelleen vaakasuuntaisen voiman resultantin avulla, vastaavasti kuin impulsiivisen komponentin tapauksessa, on myös määritetty ekvivalentti konvektiivinen massa  $M_c$ :

$$M_c = M \frac{1}{4} \left(\frac{11}{12}\right)^2 \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{R}{h} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}\right). \quad (61)$$

Myös konvektiivisen massan tulee sijaita sopivalla etäisyydellä  $h_c$  säiliön pohjasta, jotta sen aiheuttama taivutusmomentti vastaa nesteen todellisesta hydrodynaamisesta paineesta syntyvää momenttia [4]. Kun säiliön seinien paineen lisäksi myös pohjaan kohdistuvan paineen vaikutus on huomioitu, etäisyys on

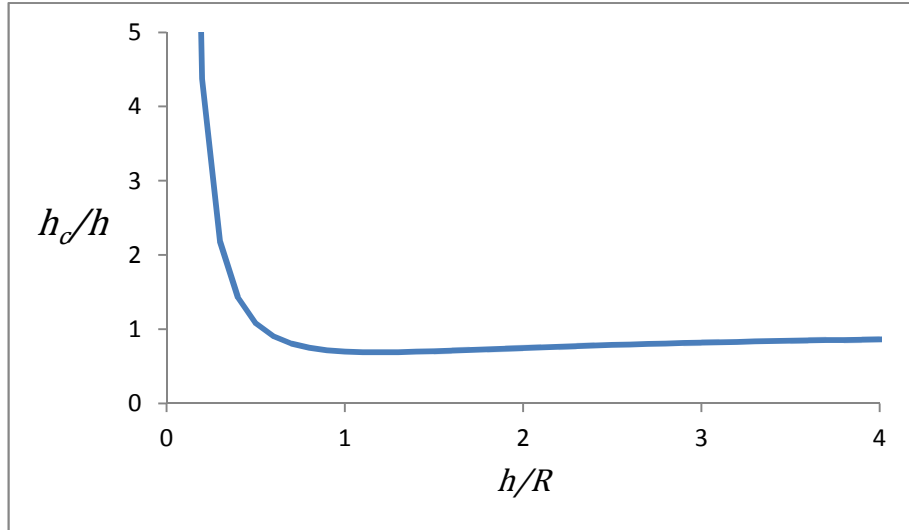
$$h_c = h \left( 1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}\right) - \frac{135}{88}}{\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R} \sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R}\right)} \right). \quad (62)$$

Kuvasta 17 nähdään, että mitä matalampi ja leveämpi säiliö on, sitä suurempi on konvektiivisen komponentin osuus nesteen kokonaismassasta. Tämä johtuu siitä, että leveässä säiliössä vapaata nestepintaa ja siten myös aaltoilevaa nestettä on suhteessa enemmän, jolloin konvektiivisen komponentin osuus on suurempi [21, s. 34-35].



**Kuva 17** Konvektiivisen massan riippuvuus säiliön mittasuhteista.

Kuvasta 18 puolestaan havaitaan, että leveässä säiliössä konvektiivisen massan etäisyys säiliön pohjasta on suuri, kuten oli myös  $h_i$ :n tapauksessa, koska pohjaan kohdistuvan paineen aiheuttaman taivutusmomentin osuus on tällöin merkittävämpi. Toisaalta kun säiliö kapenee, konvektiivisen komponentin vaikutuskorkeus lähestyy säiliön yläreunan tasoa, jossa aaltoliike todellisuudessaakin vaikuttaa.



**Kuva 18** Konvektiivisen massan vaikutuskorkeuden riippuvuus säiliön mittasuhteista.

Koska konvektiivinen komponentti kuvaa nesteen heilahtelua, ekvivalentissa mallissa massan  $M_c$  tulee kiinnittyä säiliöön värähtelyn mahdollistavan jousen välityksellä [17]. On esitetty, että ekvivalentin mekaanisen värähtelijän ominaistajuuden on vastattava aaltoilevan nesteen ominaistajuutta, jolloin jousen jäykkyys  $k_c$  on:

$$k_c = \omega^2 M_c. \quad (63)$$

Ekvivalentin massan  $M_c$  siirtymän perusteella voidaan myös määrittää nesteen aallonharjan pystysuuntainen siirtymä [3]. On kuitenkin havaittu, että pinnan maksimikorkeuden laskennassa tulisi ottaa huomioon myös nesteen heilahtelun korkeampia ominaismuotoja, jotta laskelmien tarkkuus olisi riittävä [23].

### 3.1.4 Kiinteät aineet

Säiliössä oleva materiaali voi olla ominaisuuksiltaan lähempänä kiinteää ainetta nesteen sijaan. Jos aine on rakeista, oletetaan, ettei pinnan aaltoliikettä ja konvektiivista painetta synny, jolloin koko sisältö liikkuu yhtenä kappaleena säiliön seinien kanssa [20]. Tuki-rakennetta mitoitettaessa efektiiviseksi massaksi voidaan kuitenkin olettaa 80 % sisällön kokonaismassasta, jos tarkempaa tietoa ei ole saatavilla [17]. Efektiivisen massan oletetaan vaikuttavan kokonaismassan massakeskipisteessä, johon myös koko sisällölle määritetty hitausmomentti tarvittaessa lisätään.

On mahdollista, että säiliön sisällön ominaisuudet muistuttavat enemmän muotoutuvaa viskoelastista kiinteää ainetta kuin nestemäistä tai rakeista materiaalia. Tällaisia aineita ja niiden käyttäytymistä on käsitelty tarkemmin lähteessä [24]. On havaittu, että viskoelastista kiinteää ainetta sisältävän säiliön dynaaminen käyttäytyminen riippuu aineen ominaisuuksien lisäksi säiliön mittasuhteista ja seinien joustavuudesta. Jos säiliössä oleva materiaali on hyvin jäykkää, systeemin ominaistaajuus on korkea ja kuorman dynaaminen luonne ei juuri kasvata staattisen kuorman aiheuttamaa vastetta. Kun sisällön joustavuus lisääntyy, dynaaminen vaikutus on voimakkaampi eli vahvistuskerroin kasvaa. Kun joustavuus ja mukautuvuus kasvavat edelleen, vahvistuskerroin alkaa pienentyä, ja hyvin pehmeille materiaaleille sen arvo voi olla paljon pienempi kuin yksi.

### 3.2 Säiliön mittasuhteet ja seinämien joustavuus

Kun säiliön sisällä oleva aine on nestemäistä, hydrodynaamisen paineen konvektiivisen komponentin merkitys riippuu lähteen [15] mukaan säiliön mittasuhteista. Matalassa ja leveässä säiliössä nesteellä on paljon vapaata pinta-alaa, jolloin konvektiivinen komponentti muodostaa suuren osan hydrodynaamisesta kokonaispaineesta. Jos tällaisen säiliön koko sisällön oletetaan liikkuvan yhdessä säiliön kanssa, eikä pinnan aaltoliikettä huomioida, päädytään todellisia suurempiin rasituksen arvoihin. Tämä johtuu siitä, että konvektiivinen paine on impulsiivista pienempi, joten konvektiivisen komponentin osuuden kasvaessa rasitukset pienenevät. Toisaalta koska aaltoliikettä esiintyy vain nesteen pinnalla, korkeissa ja kapeissa säiliöissä konvektiivisen paineen vaikutus on huomattavasti vähäisempi ja se voidaan jättää huomiotta.

Kun säiliö-neste-systeemiin vaikuttaa voimakas dynaaminen heräte, varsinkin teräksisen säiliön seinissä tapahtuu huomattavia muodonmuutoksia. Kuten aikaisemmin on todettu, heilahteleavan nesteen jaksonaika on yleensä pidempi kuin herätteen, eikä säiliön seinämien joustavuus vaikuta konvektiivisen komponentin aiheuttamiin voimiin [18, s. 4–4–4–5]. Tulokset ovat siis konvektiivisen paineen osalta riittävän tarkkoja, vaikka säiliö oletettaisiin jäykäksi, mutta impulsiivisen paineen suuruus sen sijaan riippuu merkittävästi seinien joustavuudesta. Terässäiliön seinien joustavuus tulisikin yleensä ottaa huomioon etenkin, koska joustavan säiliön dynaaminen vaste on jäykkää suurempi riippumatta säiliön mittasuhteista [23].

Säiliön joustavuus voidaan huomioida lisäämällä säiliötä kuvaavaan malliin kolmas paineen komponentti impulsiivisen ja konvektiivisen lisäksi [17]. Tämä kolmas tekijä toteuttaa reunaehdot, joiden mukaan nesteen vapaalla pinnalla paineen arvo on nolla ja nesteellä ei ole pystysuuntaista nopeutta säiliön pohjalla. Lisäksi nesteen nopeus säiliön reunoilla on yhtä suuri kuin seinän muodonmuutosnopeus. Ekvivalentissa mekaanisessa mallissa tätä muodonmuutoksen huomioivaa komponenttia kuvataan massalla  $M_f$ , joka kiinnittyy säiliön seiniin jousien välityksellä [20]. Impulsiivista ja konvektiivista komponenttia kuvaavien massojen suuruudet eivät muutu, vaikka ekvivalenttiin mekaaniseen malliin lisättäisiin kyseinen muodonmuutoskomponentti [17].

Säiliön seinien välinen etäisyys vaikuttaa systeemin dynaamiseen käyttäytymiseen myös siinä tapauksessa, että säiliön sisällä oleva aine on nesteen sijaan viskoelastista kiinteää ainetta, jossa pinnan aaltoliikettä ei synny. Lähteessä [24] on todettu, että kun viskoelastista ainetta sisältävään säiliöön vaikuttaa vaakasuuntainen staattinen voima, aineen seiniin kohdistamat voimat ovat sitä pienempiä, mitä lähempänä seinät ovat toisistaan. Jos vaikuttava voima on dynaaminen, seiniin kohdistuvat voimat ensin kasvavat ja sitten pienenevät, kun seinien välinen etäisyys pienenee. Se miksi dynaamiset vaikutukset ensin vahvistuvat, johtuu siitä, että säiliön kaventuessa myös aineen määrä aallon kulkusuunnassa vähenee, minkä takia systeemillä on pienempi vaimennuskapasiteetti [24].

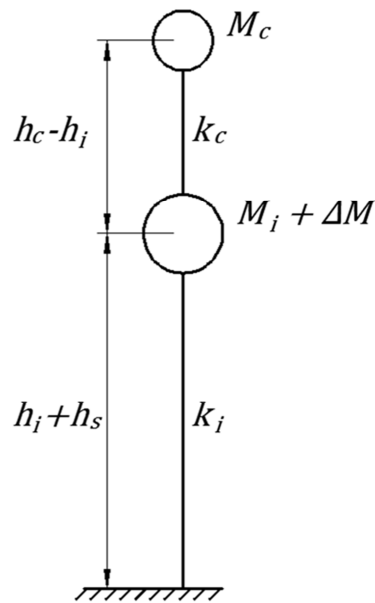
On havaittu [24], että kun säiliön sisällä on viskoelastista materiaalia, säiliön mittasuhteet vaikuttavat siihen, millä tavalla seinien joustavuus vaikuttaa systeemin dynaamiseen vasteeseen. Matalan ja leveän säiliön pohjan pinta-ala on suhteessa suuri, jolloin suurempi osa viskoelastisen aineen säiliöön kohdistamista voimista välittyy pohjan ja aineen välisten leikkausvoimien avulla. Jos tällaisen säiliön seinät ovat joustavat, seiniin kohdistuvat vaakavoimat ovat pienemmät kuin jäykkäseinäisessä säiliössä, eli seinien joustavuus pienentää vastetta. Seinien joustavuudella on siten päinvastainen vaikutus kuin nestettä sisältävän säiliön tapauksessa, jossa joustavuus kasvattaa impulsiivista komponenttia. Toisaalta jos säiliö on hyvin hoikka, voimat välittyvät pääasiassa seiniin kohdistuvien voimien kautta eli viskoelastinen aine käyttäytyy nesteen tavoin. Kun tällaisessa tapauksessa seinien joustavuus lisääntyy, systeemi käyttäytyy kuten nesteellä täytetty säiliö ja dynaaminen vaste kasvaa.

### 3.3 Korotetun säiliön ekvivalentti mekaaninen malli

Maanvaraisen säiliön dynaamisessa mitoituksessa tulee huomioida säiliön sisällä olevan aineen liike säiliön suhteen. Jos säiliö kuitenkin sijaitsee jalustan päällä irti maasta, on lisäksi huomioitava säiliön liike maahan nähden [3]. Tällaisten systeemien täydellinen analysointi voi olla monimutkaista, jolloin kannattaa tehdä tilanteeseen sopivia yksinkertaistuksia. Esimerkiksi korotetusta nestesäiliöstä voidaan muodostaa ekvivalentti mekaaninen malli, jolla on vain kaksi siirtymävapausastetta [17]. Tavallisesti huomioidaan kuitenkin myös yksi kiertymävapausaste, mitä varten systeemiin on lisättävä sitä vastaava hitausmomentti.

Kuten aiemmin on todettu, säiliön pohjaan kohdistuva hydrodynaaminen paine aiheuttaa taivutusmomenttia, minkä takia pohjan yläpuolella vaikuttava taivutusmomentti on erisuuri kuin sen alapuolella. Säiliön tukirakennetta mitoitettaessa tulee luonnollisesti käyttää pohjan alapuolella vaikuttavia rasituksia [17]. Ekvivalentissa mekaanisessa mallissa tämä huomioidaan jo etäisyyksien  $h_i$  ja  $h_c$  laskennassa, jolloin niille käytetään aiemmin esitettyjä kaavoja (59) ja (62). Kuvassa 19 on esitetty ekvivalentti systeemi, jossa nestesäiliön lisäksi on huomioitu sen tukirakenne.





**Kuva 19** Korotetun nestesäiliön ekvivalentti mekaaninen malli (perustuu lähteeseen [25]).

Korotetun nestesäiliön ekvivalentti mekaaninen malli on kuvan 19 mukaisesti uloke, joka on jaettu kahteen osaan. Ylemmän osan jäykkyys saadaan kaavasta (63) ja sen yläpäässä oleva massa kuvaa nestesäiliön alimman konvektiivisen komponentin vaikutusta [17]. Osan pituus riippuu konvektiivisen ja impulsiivisen massan välisestä etäisyydestä. Ulokkeen alemman osan jäykkyys puolestaan määräytyy tukirakenteen jäykkyyden perusteella. Sen päässä olevan massan suuruus saadaan lähteen [17] mukaan summaamalla ekvivalentin impulsiivisen komponentin ja säiliön oman massan lisäksi sopiva osuus tukirakenteen massasta. Siitä, kuinka suuri osa tukirakenteen massasta tulisi huomioida, on olemassa suosituksia esimerkiksi lähteissä [15] ja [25]. Alemman massapisteen etäisyys maasta saadaan summaamalla tukirakenteen korkeus  $h_s$  ja impulsiivisen massan etäisyys säiliön pohjasta [15]. Impulsiivista komponenttia sekä säiliötä ja sen tukirakennetta vastaava hitausmomentti lisätään tarvittaessa alempaan massapisteeseen [17].

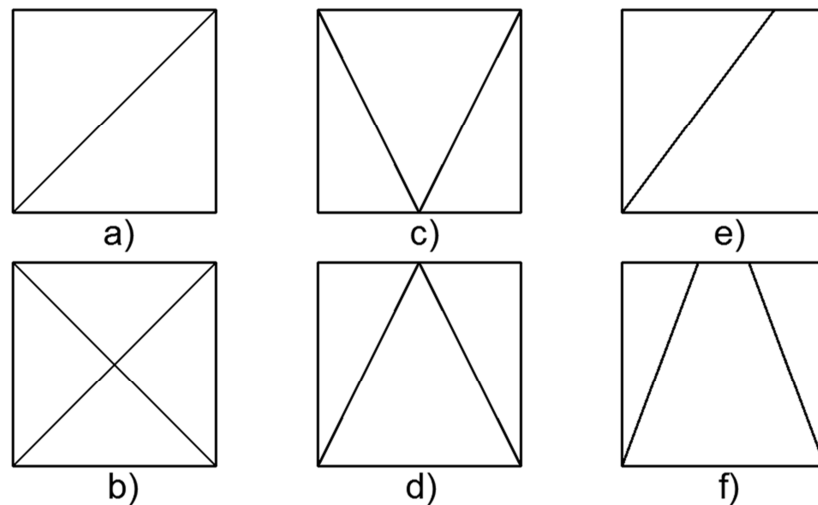
### 3.4 Teräsrunko

Rakennukset ja rakenteet on aina jäykistettävä niihin kohdistuvia vaakakuormia vastaan esimerkiksi rakenteellisen kestävyuden, stabiliteetin sekä ei-rakenteellisten osien ja laitteiden toimintakyvyn takaamiseksi. Rakennusten tapauksessa vaakasuuntaista kuormitusta voivat aiheuttaa esimerkiksi tuulenpaine tai maanjäristykset, mutta tässä työssä dynaaminen vaakavoima aiheutuu sekoittimen liikkeestä. Teräskorin jäykistäminen voi perustua esimerkiksi palkkien ja pilareiden välisiin momenttijäykkiin liitoksiin, eli niin sanottuihin jäykkiin kehiin, tai ristikkojäykistykseen, jolloin jäykistäviä komponentteja ovat kehien vinositeet [26].

Pystysuuntaisten vinositeiden päätarkoitus on vastustaa rakenteessa syntyviä leikkausvoimia, jotka aiheutuvat vaakasuuntaisesta kuormituksesta [26]. On todettu, että ristikkojäykistys on taloudellinen menetelmä johtuen siitä, että vinositeet ottavat vastaan ai-noastaan aksiaalisuuntaisia jännityksiä. Näin ollen sideprofiileina voidaan käyttää pie-nimpiä mahdollisia poikkileikkauksia, joilla rakenteen riittävä vaakasuuntainen lujuus ja jäykkyys saavutetaan. Jos rakenteen liitosten kustannusten oletetaan pysyvän muuttu-mattomina, teräsrakenteisen rungon kustannukset ovat käytännössä verrannollisia sen painoon, joten kevyet rakenteet ovat todennäköisesti taloudellisempia [27]. Näin ollen teräsrakenteiden ja niiden jäykistysen optimointi voi myös olla kannattavaa.

### 3.4.1 Ristikkojäykistys

Jäykistävät vinositeet voidaan sijoittaa kehän osaksi monin tavoin, jolloin ne muodosta-vat erilaisia ristikoita. Ristikkotyyppejä ovat muun muassa yksittäiset diagonaalisiteet, X-siteet, V- tai  $\Lambda$ -siteet sekä epätäydelliset ansasjäykisteet, joissa jäykistesauvat liitty-vät palkkeihin epäkeskisesti aiheuttaen niihin taivutusrasituksia [26]. Jos rakenteen ark-kitehtuuri ei aseta erityisiä vaatimuksia siteiden sijoittelulle, diagonaali- ja X-jäykisteitä pidetään ristikoista tehokkaimpina, kun taas muut sidetyypit helpottavat aukkojen sijoit-telua huomattavasti. Erilaisia sidetyyppejä on havainnollistettu kuvassa 20.



**Kuva 20** Teräsrakenteen sidetyyppejä: a) diagonaalisiteet, b) X-siteet, c) V-siteet, d)  $\Lambda$ -siteet, e) ja f) epätäydelliset ansasjäykisteet.

Diagonaali-, V- ja  $\Lambda$ -siteet ovat niin sanottuja täydellisiä ansasjäykisteitä [28]. Niiden on todettu kasvattavan kehän vaakajäykkyyttä ja pienentävät siirtymiä tehokkaasti. Ne myös pienentävät pilareiden taivutus- ja leikkausrasituksia mutta toisaalta kasvattavat aksiaalivoimaa. Epätäydellisillä ansasiteillä jäykistetyn kehän vaakavoimien vastusta-miskyky puolestaan perustuu lähteen [28] mukaan vaakapalkkien taivutusjäykkyyteen, minkä takia kyseisen kehän vaakajäykkyyden on havaittu olevan pienempi kuin täydellisten ansasjäykisteiden tapauksessa. Tällaiset kehät ovat erittäin sitkeitä ja niillä on

hyvä energian dissipaatiokyky, minkä takia niitä käytetään yleisesti maanjäristysalueilla sijaitsevilla rakenteilla.

Tutkimuksessa, joka on esitelty lähteessä [16], on tutkittu kokeellisesti eri sidetyyppien vaikutuksia kaksiaukkoisen ja kolmikerroksisen kehärakenteen ominaisvärähtelyyn. Tutkimuksessa on havaittu, että eri ristikkotyypit vaikuttavat kehärakenteen ominaismuotoihin ja -taajuuksiin eri tavoilla, mutta ne kaikki kuitenkin lisäävät kehän jäykkyyttä. Pystysuuntaiset tasoristikot lisäävät myös kehän vääntöjäykkyyttä häiriten vääntömuodon syntymistä ja kasvattaen sitä vastaavaa ominaistaajuutta. Useissa tutkimuksissa [16; 26; 28] on päädytty siihen, että X-siteet ovat ristikkojäykisteistä taloudellisimpia, koska ne lisäävät kehän jäykkyyttä eniten. Kuvan 5 perusteella voidaan kuitenkin todeta, että jäykkyyden kasvattaminen ei välttämättä pienennä rakenteen vastetta, sillä jos jäykemmän rakenteen ominaistaajuus onkin lähempänä herätetaajuuden arvoa, vahvistuskerroin kasvaa.

### 3.4.2 Jäykistyksen optimointi

Rakenne, jolla on monta vapausastetta, värähtelee erillisillä ominaistaajuuksilla, ja näitä taajuuksia voidaan kuvata niin sanotun taajuusspektrin avulla. Taajuusspektri muodostuu huipuista ja matalammista alueista eli niin kutsutuista aukoista, joissa ei ole lainkaan ominaistaajuuksia [29]. Rakenteen käyttötarkoitus voi vaatia, että rakenne ei ala resonoida tietyllä taajuusalueella, jolloin taajuusspektrin siinä kohdassa tulee olla aukko. Jos alkuperäisellä rakenteella on ominaistaajuuksia kyseisellä alueella, systeemin ominaisuuksia, kuten sen jäykkyyttä, on muutettava, jolloin myös sen värähtelytapa muuttuu. Lawtherin [29] mukaan tarvittavien muutosten laajuus riippuu siitä, kuinka monta ominaistaajuutta alueella alun perin on. Rakenteen ominaistaajuuksien siirtäminen voi olla tarpeen jo uuden rakenteen suunnitteluvaiheessa tai esimerkiksi olemassa olevan rakenteen käyttötarkoituksen muuttuessa.

Käänteiseksi ongelmaksi kutsutaan tilannetta, jossa ensin määritetään halutut vaikutukset ja vasta sen jälkeen etsitään niihin vaikuttavat tekijät [29]. Tällainen tilanne on esimerkiksi silloin, kun rakenteeseen tehdään muutoksia tietynlaisen taajuusspektrin aikaansaamiseksi. On havaittu, että käänteisen värähtelyongelman ratkaisemista vaikeuttavat erityisesti kaksi seikkaa. Ensinnäkin matemaattisesti tarkasteltuna systeemin värähtelytapaan vaikuttavat sen jäykkyys-, massa- sekä vaimennusmatriisit. Vaikka saataisiin selville, kuinka näitä matriiseita tulisi muokata halutun spektrin saavuttamiseksi, ei välttämättä tiedetä, miten itse rakennetta olisi muutettava. Toisaalta kun rakenteeseen tehdään muutos, joka vaikuttaa yhteen ominaistaajuuteen, on todennäköistä, että myös muut ominaistaajuudet muuttuvat. Näin ollen on mahdollista, että yhden ominaistaajuuden muuttuessa sallitaksi jokin toinen ominaistaajuus siirtyy ei-halutulle alueelle.

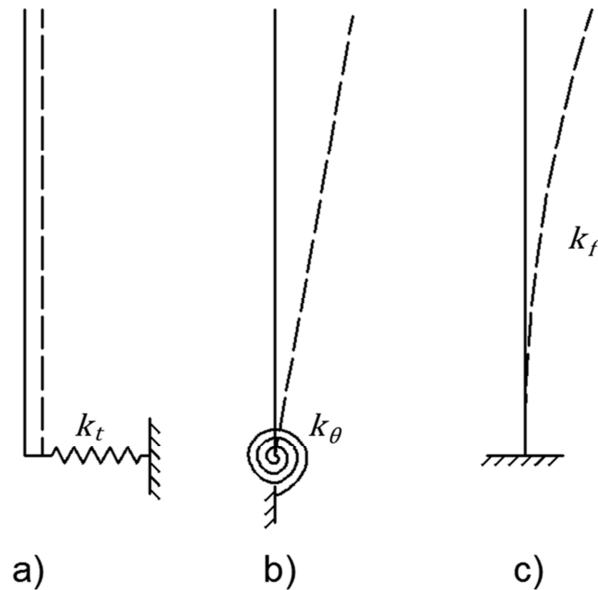
Lähteessä [30] on tutkittu muun muassa värähtelevien ristikkorakenteiden käänteistä optimointimenetelmää, jossa rakennetta muutetaan tarkoituksena saada aikaan tietyt

ominaistaajuudet. Menetelmä soveltuu rakenteessa olevien ja myös siihen lisättävien osien, kuten vinositeiden, optimointiin. Esimerkiksi ristikoiden tapauksessa rakenteen optimointia vaikeuttaa se, että ristikon sauvojen poikkileikkausalan muuttaminen vaikeuttaa sekä systeemin jäykkyys- että massaominaisuuksiin. Monen vapausasteen sistemien ominaistaajuuksien muuttamiseen tarvitaankin erityisiä algoritmeja, minkä takia kyseisessä tutkimuksessa johdetaan yhteys rakenteen geometria- ja materiaaliominaisuuksien sekä sen ominaisarvojen välille. Lähteen [30] mukaista menetelmää ei kuitenkaan käsitellä tässä työssä tarkemmin. Lähteissä [31] ja [32] on puolestaan esitetty menetelmiä rakenteen vinosidejärjestelmän topologian optimointiin. Näistä lähde [31] keskittyy erityisesti dynaamisen vasteen pienentämiseen. Topologian optimointiin ei tässä työssä perehdytä enempää, mutta todetaan, että se on yksi, joskin melko monimutkainen, menetelmävaihtoehto tehokkaimman sidejärjestelmän määrittämiseen.

### 3.5 Rakenteen ja maan vuorovaikutus

Rakenne on vuorovaikutuksessa maan kanssa perustustensa välityksellä, minkä takia myös maaperän ominaisuudet vaikuttavat rakenteen dynaamiseen käyttäytymiseen [12, s. 96-98]. On havaittu, että joissakin tapauksissa maan ja rakenteen vuorovaikutus voi vaikuttaa huomattavasti systeemin ominaistaajuuksiin maan joustavuudesta johtuen. Maalla voi olla myös hyvä vaimennuskapasiteetti, jolloin sen huomioiminen rakenneanalyysissä parantaa systeemin energian dissipaatiokykyä.

Lähteessä [12, s. 96-98] ulokepilarin perustusten joustavuutta on kuvattu kahdella jousella, jotka rajoittavat vaakasuoraa siirtymää sekä tuella tapahtuvaa kiertymää. Tilanteen yksinkertaistamiseksi pystysuuntainen tuenta on sen sijaan oletettu jäykäksi. Jos lisäksi oletetaan, että ulokepilari itsessään on joustava, rakenteella on yhteensä kolme vapausastetta. Vapausasteet ja niitä vastaavat ominaistaajuudet ovat: vaakasuuntainen siirtymä jäykkänä kappaleena  $f_t$ , kiertymä tukipisteen ympäri  $f_\theta$  sekä pilarin taipuma  $f_f$ . Pilarin tuentaa kuvaavat jouset ja eri vapausasteiden mukaiset ominaismuodot on esitetty kuvassa 21.



**Kuva 21** Joustavasti tuetun ulokepilarin vapausasteet: a) jäykän pilarin vaakasiirtymä, b) jäykän pilarin kiertymä tuella ja c) pilarin taipuma (perustuu lähteeseen [12]).

Koko systeemin ominaistaajuus  $f$  saadaan kolmen vapausasteen yhdistelmänä

$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_t^2} + \frac{1}{f_\theta^2} + \frac{1}{f_f^2} \quad (64)$$

[12, s. 96-98]. Kaavasta voidaan päätellä, että koko systeemin ominaistaajuus, joka huomioi kaikki vapausasteet, on pienempi kuin minkä tahansa yksittäisen vapausasteen ominaistaajuus. Näin ollen jos maan joustavuutta ei huomioida, laskennallisesti määritetyt ominaistaajuudet ovat todellista korkeampia. Ellisin tekemässä tutkimuksessa on havaittu, että maan ja rakenteen välinen vuorovaikutus vaikuttaa etenkin matalien rakenteiden ominaistaajuuksiin, kun taas korkeiden rakenteiden tapauksessa sen vaikutus on merkityksetön [12, s. 96-98].

Maan kyky lisätä systeemin vaimennuskapasiteettia perustuu kahteen erilliseen mekanismiin eli maamateriaalin sisäisen kitkan aiheuttamaan energian dissipaatioon sekä maan aaltoliikkeeseen, joka suuntautuu värähtelylähteestä ulospäin kuljettaen samalla energiaa systeemistä pois [12, s. 96-98]. Aaltoliikkeestä johtuva vaimennus eli säteilyvaimennus ei siis perustu energian häviämiseen tai muuntumiseen vaan energian ympäristöön siirtymiseen. Säteilyvaimennuksen suuruus riippuu muun muassa maaperän ominaisuuksista sekä värähtelyliikkeen suunnasta [17]. Esimerkiksi eurokoodissa [17] säteilyvaimennuksen maksimiarvoksi on suositeltu 25 %:a.

Maaperän vaikutuksen lisäksi tukirakenteen mitoituksessa tulisi ottaa huomioon sen perustamistapa ja etenkin peruspilareiden vaikutus. Peruspilarit tekevät teräskehän tuennasta joustavan, joten myös niiden vaikutusta systeemin ominaistaajuuksiin voidaan kuvata edellä esitetyllä jousisysteemillä. Lisäksi on huomioitava teräsrungon ja peruspi-

larin välisen liitoksen joustavuus, johon vaikuttavat niin päätylevyn, pulttien kuin jälki-valunkin ominaisuudet [33].

### 3.6 Vaimennus

Säiliösystemin eri osilla, kuten säiliön sisällöllä ja tukirakenteella, on erilainen vaimennuskapasiteetti. Jos kuitenkin halutaan määrittää koko systemin kattava viskoosi vaimennuskerroin, se voidaan laskea esimerkiksi eri komponenttien deformaatioenergioiden avulla [34]. Tämä niin kutsuttu efektiivinen viskoosi vaimennuskerroin ottaa huomioon osien erilaiset vaimennuskapasiteetit, ja se voidaan määrittää erikseen jokaiselle ominaisuudolle.

Nestemäisen aineen säiliön seiniin kohdistamaa hydrodynaamista painetta voidaan kuvata kahdella komponentilla, konvektiivisella ja impulsiivisella, joilla on keskenään erilaiset vaimennusominaisuudet. Kun neste heilahtelee säiliössä, energiaa muuntuu muihin muotoihin aiheuttaen aaltoliikkeen vaimenemista [19, s. 25]. Tämä konvektiiviseen komponenttiin liittyvä vaimeneminen johtuu nesteen viskositeetista erityisesti säiliön seinän vieressä, johon syntyy niin kutsuttu rajakerros, ja lisäksi vaimennusta aiheuttavat nesteen sisäosien viskoosit jännitykset. Vaimennuskapasiteetin on todistettu olevan sama aaltoliikkeen siirtymä- ja rotaatiomuodoille. Koska konvektiivisen komponentin vaimennuskapasiteetti on yleensä pieni, voidaan sen vaikutuksia pitää lineaarisina, minkä takia vaimennusta voidaan mallintaa ekvivalenteilla lineaarisilla viskooseilla vaimentimilla [19, s. 49-50]. Lisäksi vaimennuskyvyn ollessa pieni voidaan olettaa, että vaimennuksen huomioiminen ei vaikuta ekvivalentin massan  $M_c$  ja etäisyyden  $h_c$  arvoihin.

Nesteillä, joilla on korkea viskositeetti, on myös suurempi konvektiivisen komponentin vaimennuskapasiteetti, mutta impulsiivisen komponentin vaimennukseen viskositeetin vaikutus on merkityksetön [18, s. B-1-B-4]. Tulee kuitenkin huomioida, että vaikka nesteen viskositeetti on 10 Pa·s eli noin 10000-kertainen veden viskositeettiin verrattuna, alimman konvektiivisen komponentin vaimennuskerroin on vain hieman yli 1 %. Lähteessä [18] onkin todettu, että useimmiten viskositeetin vaikutus hydrodynaamisiin paineisiin voidaan olettaa merkityksettömäksi, jolloin viskoosittomille nesteille johdetut menetelmät tuottavat riittävän tarkan tuloksen. Nesteen viskositeetin lisäksi konvektiivisen komponentin vaimennuskykyyn vaikuttavat säiliön muoto ja täyttöaste siten, että säiliön leveyden kasvaessa vaimennuskapasiteetti pienenee [18, s. B-1-B-4]. Systemin vaimennuskapasiteettia voidaan myös tarvittaessa lisätä esimerkiksi säiliön seiniin kiinnitetyillä rengasvaimentimilla, jotka hillitsevät nesteen heilahtelua [19, s. 29].

Nestesäiliössä paineen impulsiivisen komponentin vaimennuskapasiteetin voidaan olettaa olevan yhtä suuri säiliön seinämateriaalin vaimennukseen verrattuna [18, s. 4-8-4-9]. Jos systemin rasitustaso ei ole korkea, impulsiivisen komponentin viskoosiksi vaimennuskertoimeksi on suositeltu 2 %:a [18, s. 3-40]. Alimman konvektiivisen kom-

ponentin vaimennuskertoimena voidaan lähteen [18] mukaan puolestaan käyttää 0,5 %:a. Tämän arvon todetaan yleensä olevan liian suuri, jos vaimennus johtuu pelkästään nesteen viskositeetista [18, s. B–4]. Säiliössä on kuitenkin usein muita osia, kuten putkia, tai muita vaimennusta kasvattavia tekijöitä, minkä takia kyseistä arvoa voidaan käyttää suunnittelussa. Toisaalta vaimennuskyvyn muutokset eivät myöskään vaikuta huomattavasti konvektiiviseen komponenttiin, koska sen taajuus on melko pieni. Korkeampitaajuiseen impulsiiviseen komponenttiin vaimennuksen vaikutuksen sanotaan puolestaan olevan suurempi.

Rakeisten aineiden vaimennuskertoimeksi voidaan olettaa 10 %, jos todellista vaimennuskapasiteettia ei ole tarkemmin määritelty [17]. Viskoelastisen kiinteän aineen vaimennuskertoimena sen sijaan käytetään lähteessä [24] arvoa 5 %. Kyseisessä lähteessä todetaan, että viskoelastisen aineen vaimennuskyky kasvaa, kun säiliön leveyden suhde korkeuteen kasvaa. Reaktio on siis päinvastainen nesteellä täytettyyn säiliöön verrattuna. Vaimennuskyvyn paranemisen kerrotaan johtuvan siitä, että leveässä säiliössä aallot joutuvat kulkemaan pidemmän matkan ennen kuin ne heijastuvat takaisin säiliön seinästä. Näin ollen aallot myös vaimentuvat enemmän verrattuna tilanteeseen, jossa ne kulkevat lyhyemmän matkan ennen heijastumistaan.

Säiliön tukirakenteen vaimennuskerroin voidaan määrittää esimerkiksi kirjallisuuden perusteella, jos parempaa tietoa vaimennuskapasiteetista ei ole. Eri kirjallisuuslähteissä esitetyt dynaamiset mitoitustilanteet käsittelevät kuitenkin yleensä maanjäristystilannetta, jossa rakenteelle sallitaan huomattavia muodonmuutoksia. Koska tutkittavan systeemin tulee pysyä käyttökelpoisena dynaamisista voimista huolimatta, ei rakenteen suuria vaurioita tai muodonmuutoksia voida sallia. Maanjäristyksiä käsittelevässä eurokoodissa on kuitenkin esitetty myös säiliön mitoitustilanne, jossa säiliön täytyy säilyä toimintakykyisenä ja vuotamattomana seismisen toiminnan aikana [17]. Näin ollen ohjetta voidaan soveltaa myös tutkittavaan rakenteeseen. Tällaisessa mitoitustilanteessa hitsatun teräsrakenteen viskoosiksi vaimennuskertoimeksi suositellaan 2 % ja pultatun 4 % [34]. Lähteessä [35] yksiaukkoisen kolmiulotteisen kehän vaimennuskertoimeksi on saatu kokeellisesti noin 1,4–3 % jäykistyssiteiden sijoittelusta riippuen. Lähteessä [36] viisi-kerroksisen teräskehän vaimennukseksi on puolestaan saatu 1,98 %. Edellä mainittujen lähteiden perusteella teräsrungon vaimennuskertoimena käytetään tässä työssä 2 %:a.

## 4 HERÄTEVOIMA JA VASTEEN RAJA-ARVOT

Kennot, niiden sisältämä liete sekä tukirakenne muodostavat tutkittavan systeemin, johon dynaaminen voima vaikuttaa. Sekoittimella varustetussa kennosysteemissä dynaamisen voiman aiheuttaa sekoittimen pyörimisliike, jolloin herätteen merkittävin taajuus on sama kuin sekoittimien taajuus [37]. Lähteen [37] mukaan kennon tukirakenne on perinteisesti suunniteltu siten, että koko systeemin ominaistajuus on 25 % herätetaajuutta korkeampi, jolloin tukirakenne on hyvin jäykkä. Näin ollen rakenteiden kustannukset yleensä nousevat, kun sekoittimen käyntitaajuutta nostetaan. On myös mahdollista, että harmonisen herätteen lisäksi systeemiin kohdistuu impulssimaisia voimia, jotka voivat herättää rakenteen värähtelemään resonanssitaajuudellaan [38].

Nykyisin käytössä oleva tukirakenteen mitoitus tapa johtaa yleensä hyvin massiivisiin ja kalliisiin rakenteisiin. Jotta kustannuksien pienentäminen olisi mahdollista, suunnittelun lähtökohtana ei käytännössä voi olla ominaistajuusvaatimus eli rakenteen suuri jäykkyys. Tukirakenteen mitoittaminen voi sen sijaan perustua esimerkiksi systeemin värähtelytason rajoittamiseen. Se kuinka suuri dynaaminen vaste, kuten siirtymä tai nopeus, voidaan sallia, riippuu esimerkiksi käynnissä olevasta prosessista ja laitteistosta. Lisäksi tulee varmistaa, ettei rakenteen värähtely ole haitallista laitetta huoltavalle henkilöstölle tai aiheuta rakenneosien ennen aikaista väsymistä [12, s. 6].

### 4.1 Harmoninen heräte

Jotta systeemin dynaaminen vaste voidaan määrittää laskennallisesti, täytyy tietää herätevoiman suuruus ja tyyppi. Useimmat säiliöiden tai kennojen dynaamista käyttäytymistä käsittelevät tutkimukset keskittyvät maanjäristyksen aiheuttamiin kuormiin, jolloin laskenta perustuu vastespektrimenetelmään [12, s. 169-170]. Tutkittavassa kennosysteemissä sekoittamisprosessin aiheuttama heräte on kuitenkin jaksollinen ja harmoninen, joten tilanteen laskennallinen käsittely on yksinkertaisempaa. Toisaalta tiedetään myös, että aikaisemmin esitellyn ekvivalentin mekaanisen mallin ominaisuudet riippuvat ainoastaan säiliön muodosta ja sen sisällä olevan materiaalin ominaisuuksista [19, s. 43]. Herätteen tyyppi ei siis vaikuta mallin parametreihin, kun säiliön seinät ovat jäykät, joten menetelmää voidaan käyttää maanjäristysmitoituksen lisäksi myös muissa dynaamisissa tarkasteluissa.

Lietekennojen dynaamiset ominaisuudet riippuvat mekaanisten suureiden, kuten massan ja mittasuhteiden, lisäksi esimerkiksi sekoitettavan lietteen juoksevuudesta ja syntyvistä virtauskuvioista [37]. Myös lietteen sekoittamisprosessista aiheutuvien voimien määrittäminen on siten monimutkaista ja vaatii useiden alojen asiantuntemusta. Dynaamisen



herätevoiman laskentaan ei siksi perehdytä tarkemmin tässä työssä, vaan vaakavoiman amplitudin oletetaan olevan suuruudeltaan 1 kN. Tämän suuruinen voima syntyy tutkitavalla herätetaajuudella lietteen massan epäkeskisyydestä esimerkiksi silloin, kun epätasapainomassan suuruus on 200 kg ja etäisyys pyörimisakselista noin 20 mm. Lisäksi on huomioitava, että myös laitteiston epäkeskisyydet voivat aiheuttaa huomattavia dynaamisia voimia. Tämän takia on tärkeää huolehtia jo asennusvaiheessa, että laitteisto on tasapainossa, jotta haitallista värähtelyä ei pääse syntymään [37]. Ensimmäiset värähtelymittaukset ja tarvittavat korjaukset onkin tehtävä heti asennuksen jälkeen, minkä lisäksi värähtelytasoa tulee seurata käytön aikana.

Tutkittavaan kennosysteemiin voi todellisuudessa vaikuttaa useita voimia dynaamisen herätteen lisäksi. Luonnollisesti rakenteiden omat painot on huomioitava sekä staattisessa että dynaamisessa analyysissä. Lisäksi lämpötilan muutoksista johtuvat lämpötilakuormat sekä ulkona sijaitsevaan rakenteeseen kohdistuva tuulenpaine voivat aiheuttaa voimakkaitakin rasituksia. Tässä työssä kuitenkin oletetaan, että tutkittava rakenne sijaitsee sisätiloissa vakio- lämpötilassa, joten lämpötila- ja tuulikuormia ei huomioida laskelmissa.

## 4.2 Impulssiheräte

Harmonisen herätteen lisäksi tutkittavaan systeemiin voi kohdistua impulssimaisia herätteitä prosessin sisäisten tai ulkoisten tekijöiden vaikutuksesta. Impulssi tarkoittaa lyhytkestoista voimaa, jonka kuvaaja ajan funktiona voi olla minkä tahansa, kuten puolikkaan siniaallon tai kolmion, muotoinen [1, s. 73-79]. On huomattu, että systeemin vaimennuksella ei ole suurta vaikutusta impulssin aiheuttamaan maksimivasteeseen toisin kuin esimerkiksi harmonisen herätteen tapauksessa. Tämä johtuu siitä, että impulssiherätteen seurauksena systeemi saavuttaa maksimivasteensa hyvin nopeasti, eivätkä vaimennusvoimat ehdi juurikaan dissipoidaan energiaa.

Impulssiherätteen aiheuttama vaste voidaan jakaa kahteen vaiheeseen [1, s. 73-79]. Näistä ensimmäinen ilmenee voiman vielä vaikuttaessa systeemiin ja toinen, kun voima on lakannut vaikuttamasta ja systeemi värähtelee vapaasti. Toisin kuin jaksollisten herätteiden, joiden energia on keskittynyt yksittäisille taajuuksille, impulssiherätteen energia on jakaantunut leveämmälle alueelle [38]. Tästä johtuen impulssi herättää systeemin kaikki resonanssitaajuuudet niin kutsutun hyödyllisen taajuusalueen sisällä. Hyödyllisen taajuusalueen laajuus riippuu lähteen [38] mukaan impulssin muodosta sekä vaikutusajan pituudesta siten, että alueen laajuus on kääntäen verrannollinen vaikutusajan pituuteen. Näin ollen lyhytkestoinen impulssi herättää resonanssitaajuuksia suuremmalta taajuusalueelta kuin pitkäkestoinen.

Kun halutaan selvittää olemassa olevan rakenteen ominaistaajuuudet, impulssimaista voimaa eli iskua ja sen kykyä herättää resonanssitaajuuksia voidaan käyttää hyödyksi. Impulssin hyödyllisen taajuusalueen laajuutta voidaan muuttaa esimerkiksi vaihtamalla

iskevän kappaleen kovuutta ja painoa [38]. Toisaalta rakenteeseen tarkoituksettomasti kohdistuvat, esimerkiksi siihen kytketyn laitteen aiheuttamat, impulssit ja niistä johtuva resonanssitaajuuksien herääminen voi myös haitallista. Impulssivoimien aiheuttamaa värähtelyä voidaan kuitenkin kontrolloida erilaisilla menetelmillä, joita on esitelty seuraavassa luvussa.

### 4.3 Dynaamisen vasteen kontrollointi

Rakenteen värähtelyä ja vastetta voidaan kontrolloida neljällä tavalla, jotka ovat: eristävien elementtien tai dynaamisten värähtelyvaimentimien (Dynamic Vibration Absorber, DVA) käyttäminen, vaimennuskapasiteetin kasvattaminen sekä ominaistaajuuksien kontrolloiminen esimerkiksi rakenteen jäykkyyttä muuttamalla [39]. Jäykkyyden vaikutusta teräsrakenteen ominaistaajuuksiin on käsitelty aiemmin aliluvussa 3.4, joten tässä osiossa keskitytään kolmeen muuhun edellä mainittuun menetelmään. On myös huomattava, että vasteen rajoittaminen rakennetta jäykistämällä on usein kallista, minkä takia värähtelyn kontrolloiminen muulla tavalla voi olla kannattavaa [12, s. 47-51].

Eristäviä elementtejä voidaan käyttää laitteen ja sen tukirakenteen välissä joko estämään värähtelyn siirtyminen tuelta laitteeseen tai värähtelevästä laitteesta tuelle [12, s. 30-31]. Käytännössä eristävä kerros koostuu jousista ja mahdollisesta vaimentimesta. Eristeen toimivuutta kuvataan suurella siirtyvyys  $T_R$ , joka ilmoittaa toiselle komponentille välittyvän voiman  $F_T$  suhteen vaikuttavaan voimaan  $F$ , ja sen arvo saadaan kaavasta

$$T_R = \frac{F_T}{F} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\Omega/\omega)^2}}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega)^2)^2 + (2\xi\Omega/\omega)^2}} \quad (65)$$

[9, s. 44]. On havaittu, että herätetaajuuden on oltava suuri verrattuna eristetyn systeemin ominaistaajuuteen eli eristävien jousien tai muun eristemateriaalin on oltava joustavaa, jotta siirtyvyyden arvo olisi pieni. Taajuussuhteen ehdoksi vaimennuskertoimesta riippumatta on annettu

$$\frac{\Omega}{\omega} \gg \sqrt{2}, \quad (66)$$

jonka toteutuessa eristemateriaali pienentää välittyvää voimaa huomattavasti.

Toisena dynaamisen vasteen kontrollointimenetelmistä esitellään värähtelynvaimentimia. Värähtelynvaimennin voi olla tyypiltään joko aktiivinen, jolloin vaimentimen toimintaa kontrolloi ulkoinen mekanismi, tai passiivinen, jolloin vaimennin toimii itsenäisesti, mutta se kontrolloi vain yhtä värähtelytaajuutta [39]. Passiivisia vaimentimia ovat esimerkiksi massa-jousi-vaimennin-systeemit ja impaktivaimentimet, joiden vaimennuskyky perustuu massan iskeytymiseen. Seuraavaksi perehdytään tarkemmin massa-jousi-systeemin toimintaan ja värähtelynvaimennuskykyyn, joka perustuu alkuperäisen rakenteen ominaistaajuuden muuttumiseen [12, s. 47-51].

Kun rakenteeseen kiinnitetään massa-jousi-yhdistelmä, jonka ominaistajuus on sama kuin alkuperäisen rakenteen, syntyvällä systeemillä on kaksi ominaistajuutta, joista yksi on alkuperäistä matalampi ja toinen korkeampi [12, s. 47-51]. Näin ollen välttytään resonanssilta tilanteessa, jossa herätetaajuus on yhtä suuri kuin ominaistajuus lähtötilanteessa. Optimaalisen värähtelynvaimentimen ominaistajuuden  $f_{DVA}$  suhde alkuperäisen rakenteen ominaistajuuteen  $f$  tulee Hahnkammin mukaan olla

$$\frac{f_{DVA}}{f} = \frac{1}{1 + m_{DVA}/m} \quad (67)$$

[12, s. 47-51]. On myös todettu, että vaimentimen hyvän toiminnan takaamiseksi massan  $m_{DVA}$  on yleensä oltava pieni varsinaisen rakenteen massa  $m$  verrattuna.

Jos värähtelynvaimentimena toimivaan massa-jousi-systeemiin lisätään vaimentava elementti, dynaaminen värähtelynvaimennin toimii laajemmalla taajuusalueella, koska systeemin ominaistajuuksien kohdalla olevat maksimivasteet pienenevät [12, s. 47-51]. Brock on esittänyt, että värähtelynvaimentimen vaimennuskerroin on optimaalinen silloin, kun vahvistuskertoimen kuvaajan korkeimmat kohdat ovat mahdollisimman tasaisia eikä selviä huippuja esiinny [12, s. 47-51]. Tämä toteutuu Smithin [12] mukaan riittävällä tarkkuudella, kun vaimennuskerroin on

$$\xi^2 = \frac{3 m_{DVA}/m}{8(1 + m_{DVA}/m)^3}. \quad (68)$$

Kolmas tapa kontrolloida rakenteen värähtelyä on sen vaimennuskapasiteetin kasvattaminen. Rakenteen vaimennuskapasiteettia voidaan parantaa lisäämällä siihen vaimentavia elementtejä, joiden toiminta voi perustua esimerkiksi viskoelastisen materiaalin vaimennuskykyyn tai vaimentimen osien väliseen kitkaan. Vaimentimien tarkoitus on lisätä rakenteellista vaimennusta eli energian dissipaatiokykyä, jolloin rakenteen dynaaminen vaste pienenee ja esimerkiksi maanjäristyksen aikana varsinainen rakenne toimii elastisesti eikä myötää [36; 40]. Vaimentimen tyypistä riippuen se voi sijaita esimerkiksi vinositeen tai momenttijäykän liitoksen osana.

Viskoelastinen vaimennin koostuu teräslevyistä, joiden välissä on viskoelastista materiaalia. Sen vaimennuskapasiteetti riippuu muun muassa vaimentimen koosta ja käytetyn materiaalin ominaisuuksista [36]. Viskoelastisen materiaalin toimintaan vaikuttavat myös herätetaajuus, materiaalin venymä sekä ympäristön lämpötila, joten myös nämä asiat tulisi ottaa huomioon vaimenninta suunniteltaessa. Kyseinen vaimennintyyppi voi lisätä systeemin vaimennuskapasiteettia huomattavasti, sillä esimerkiksi lähteessä [41] on havaittu kokeellisesti, että viisikerroksisen jäykkänurkkaisen kehän vaimennuskerroin voi kasvaa 0,54 %:sta jopa 14,34 %:iin, kun sen jokaiseen kerrokseen lisätään viskoelastiset vaimentimet.

Kitkavaimentimet integroidaan useimmiten teräskehän jäykistysiteisiin [40]. Lähteessä [42] on esitelty X-siteiden risteämiskohtaan asennettava kitkavaimennintyyppi, joka koostuu pysty- ja vaakasuuntaisista linkkielementeistä sekä teräsosien välissä olevista kitkapaloista. Kyseinen vaimennin soveltuu erityisesti vinositeisiin, jotka on suunniteltu ottamaan vastaan pelkkiä vetojännityksiä, eli ne voivat nurjahtaa jo pienen puristusjännityksen vaikutuksesta. Vaimennin on suunniteltu siten, että ennalta määritetyllä voiman arvolla vaimentimen osat alkavat liukua toistensa suhteen, jolloin liikkuvien osien välille kehittyy energiaa dissipoivia kitkavoimia. Voiman, joka aiheuttaa vaimentimen osien liikkeen, tulee olla niin pieni, että liukumista tapahtuu ennen kuin muut rakenneosat alkavat myötää. Liukumisen seurauksena vaimentimen muoto muuttuu neliöstä vinoneliöksi, jolloin nurjahtanut puristussauva suoristuu ja se voi vastaanottaa vetojännityksiä heti, kun kuormituksen suunta muuttuu.

Lähteessä [40] on puolestaan tutkittu kitkavaimentimia, jotka asennetaan momenttijäykän kehän palkki-pilari-liitokseen sekä pilarin tyveen. Perinteisissä rakenteissa energiaa dissipoituu maanjäristystilanteessa rakenteen niissä kohdissa, joissa tapahtuu plastisia muodonmuutoksia [40]. Momenttijäykän kehän tapauksessa plastisoituvia alueita ovat erityisesti palkkien päät sekä pilarin tyvi. Lähteen [40] mukaisessa rakenteessa nämä alueet on korvattu kitkavaimentimilla ja dissipaatiota tapahtuu vain vaimennuslaitteissa. Tällöin myös rakenteen vaimennuskapasiteetti kasvaa ja rakenneosien jännitykset pysyvät elastisella alueella.

#### 4.4 Laitteelle sallittava värähtelytaso

Jotta värähtely ei olisi haitallista systeemiin kuuluville laitteille, tulee dynaamiselle vasteelle asettaa maksimiraja-arvot. Se kuinka suuri vaste saa olla, riippuu laitteiden ominaisuuksista, joten sallittu värähtelytaso tulee määrittää tilannekohtaisesti eikä yleispätevää rajaa voida antaa. Esimerkiksi flotaatioprosesseissa käytettäville laitteille pidetään sopivina standardin SFS-ISO 10816-3 mukaisia siirtymän ja nopeuden raja-arvoja [37]. Vaikka standardi koskee pyöriviä laitteita, joiden taajuusalue on 2-2500 Hz, vasteen maksimiarvoja voidaan lähteen [37] mukaan soveltaa myös matalampitaajuisille flotaatiolaitteille.

Kyseisessä standardissa [5] laitteet jaetaan ryhmiin 1 ja 2 eli suuriin ja keskikokoisiin, jotka eroavat toisistaan esimerkiksi laitteiden tehon ja pyörimisnopeuden perusteella. Flotaatioissa käytettävät sekoittimet sijoitetaan ryhmään 2, vaikka pyörimisnopeuden perusteella ne kuuluisivat ennemmin suurten laitteiden ryhmään [37]. Standardissa [5] myös tukirakenteet jaetaan kahteen luokkaan: jäykkiin ja joustaviin. Tuenta luokitellaan jäykäksi, jos tukirakenteen ja laitteiston muodostaman kokonaisuuden alin ominaistajuus on vähintään 25 % korkeampi kuin pääasiallinen herätetaajuus, joka on yleensä sama kuin laitteen pyörimistaajuus. Muussa tapauksessa tuenta on joustava. Tukirakenteen joustavuus tulee määrittää kaikkiin mittaussuuntiin erikseen, joten tukirakenne voi esimerkiksi olla joustava vaakasuunnassa mutta jäykkä pystysuunnassa [5]. Tässä työs-

sä mitoituksen lähtökohta on, että tukirakenne on joustava tutkittavien vasteiden suunnassa.

Standardissa SFS-ISO 10816-3 vasteet jaetaan niiden voimakkuuden perusteella vyöhykkeisiin, joiden raja-arvot riippuvat sekä laitteen koosta että tukirakenteen joustavuudesta [5]. Ryhmään 2 kuuluvan joustavasti tuetun laitteen vasteiden vyöhykejako on esitetty taulukossa 1. Taulukossa on annettu neljän vyöhykkeen, A-D, raja-arvot värähtelyn aiheuttamalle siirtymälle ja nopeudelle eli siirtymän muutokselle ajan suhteen. Se mihin vyöhykkeeseen laite kuuluu, määritetään rajoittavamman suureen mukaan [5]. Vyöhykkeet A-D on järjestetty standardin [5] mukaisesti lievimmästä värähtelytasosta voimakkaimpaan siten, että vyöhyke A kuvaa juuri asennetun laitteen tavanomaista värähtelytasoa ja D-vyöhykkeeseen kuuluvaa värähtelyä pidetään laitteelle vahingollisena. Näiden välille sijoittuvassa vyöhykkeessä B värähtely on niin lievää, että se ei vaaranna laitteen toimintaa ja laite voi toimia kyseisellä värähtelytasolla pitkäkestoisesti. Vyöhykkeen C värähtely ei puolestaan sovellu jatkuvaan pitkäaikaiseen operointiin, mutta laitetta voidaan käyttää tällä tasolla rajoitetun ajan ennen korjaustoimia.

**Taulukko 1** Laitteen värähtelyvoimakkuuden vyöhykejako (perustuu lähteeseen [5]).

Tuentatyyppi	Vyöhyke	Siirtymän huippuarvo	Nopeuden huippuarvo
		mm	mm/s
Joustava	A	0 – 0,052	0 – 3
	B	0,052 – 0,100	3 – 6
	C	0,100 – 0,160	6 – 10
	D	0,160 –	10 –

Tässä työssä laitteen kohdalle sallitaan vyöhykkeen A mukaiset dynaamiset vasteet, jotta laitetta voidaan käyttää mahdollisimman pitkään ennen liiallisesta värähtelystä johtuvaa korjaustarvetta. On huomioitava, että standardissa [5] annetut ohjeet ja raja-arvot koskevat laitteesta paikanpäällä tehtyjä mittauksia, kun laite on toiminnassa ja saavuttanut vakaan pyörimistilan. Paremman tiedon puuttuessa näitä arvoja käytetään tässä työssä kuitenkin laskentavaiheen mitoitusehtoina. Jotta standardissa esitettyjä raja-arvoja voitaisiin noudattaa mitoitusilanteessa mahdollisimman luotettavasti, tulee annetut ohjeet esimerkiksi mittauspisteen sijainnista huomioida. Flotaatilaitteiden tapauksessa mittaukset suoritetaan yleensä sekoittimen ylätukilaakerin kohdalta eli lähes sekoittimen yläreunan korkeudelta [37].

## 4.5 Henkilöstölle sallittava värähtelytaso

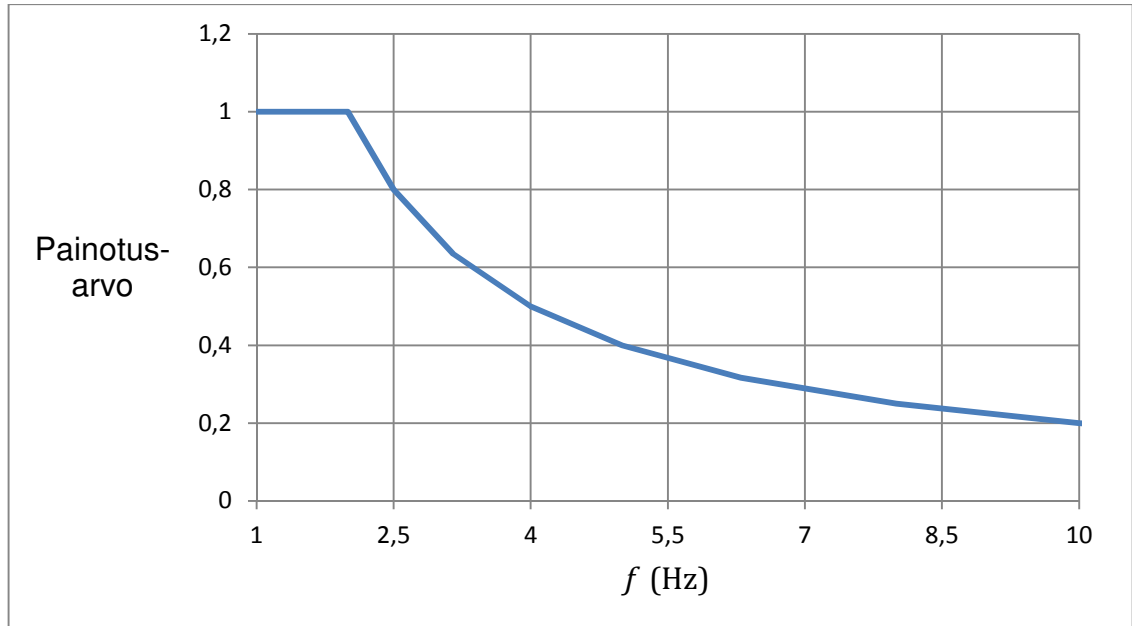
Koko kehoon kohdistuvaa värähtelyä voi esiintyä esimerkiksi rakennuksissa, kulkuneuvoissa sekä laitteissa, joista värähtely välittyy ihmiseen tukipinnan, kuten lattian tai istuimen, kautta [43]. Värähtelylle altistuminen voi lähteen [43] mukaan vaikuttaa ihmisten terveyteen, turvallisuuteen, mukavuudentunteeseen sekä toimintakykyyn. Se millai-

sia vaikutuksia koko kehoon kohdistuvalla värähtelyllä on, riippuu muun muassa altistuksen kestosta, säännöllisyydestä ja satunnaisuudesta sekä siitä, millaisia tehtäviä ihmiset suorittavat värähtelylle altistuessaan [12, s. 291-293]. Esimerkiksi tarkkuutta vaativissa työtehtävissä lieväkin värähtely voi olla häiritsevää ja myös toimistotöissä värähtelyä siedetään selvästi vähemmän kuin rakennustyömaalla tai teollisuuskohteissa.

Ihmisen herkkyys värähtelylle riippuu muun muassa värähtelyn voimakkuudesta, suunnasta ja taajuudesta [12, s. 290-292]. Voimakkuuden mittarina voi olla esimerkiksi värähtelyn amplitudi tai nopeus, mutta on havaittu, että suurin osa tutkijoista pitää kiihtyvyyttä parhaana mittayksikkönä. Tutkittavassa tapauksessa laite aiheuttaa värähtelyä, joka toistuu jokaisella jaksolla samanlaisena, jolloin riittää, että tiedetään maksimikiihtyvyys. Usein on kuitenkin tarpeen määrittää kiihtyvyyden neliöllinen keskiarvo (Root Mean Square, RMS), koska värähtelyn ollessa epäsäännöllistä yksittäinen huippukiihtyvyyden arvo ei kuvaa sen vaikutuksia riittävästi [12, s. 290-292]. Jos värähtely sisältää satunnaisia voimakkaita sykäyksiä, voidaan myös käyttää vaihtoehtoisia menetelmiä, jotka ottavat paremmin huomioon huippuarvojen vaikutuksen [43].

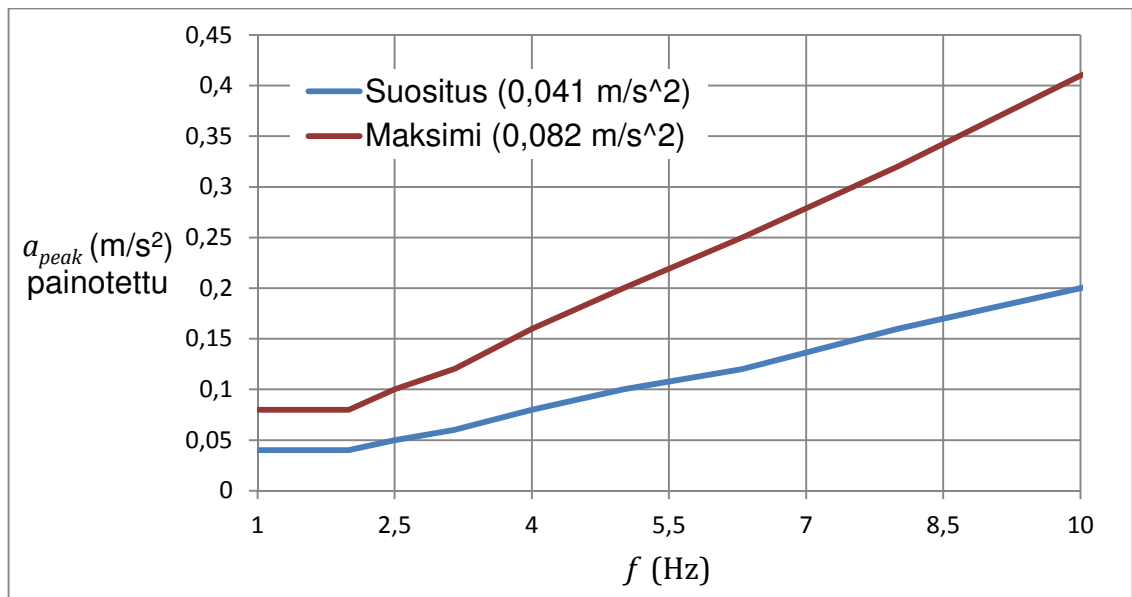
Ihminen reagoi kehon erisuuntaiseen liikkeeseen eri tavalla, joten on tärkeää tietää, missä asennossa ihminen altistuu värähtelylle. Seisovalle ihmiselle pystysuuntaisen värähtelyn tiedetään olevan vaakasuuntaista häiritsevämpää [12, s. 284-292]. On havaittu, että erityisen epämukavana pidetään pystysuuntaista värähtelyä taajuusalueella 2-30 Hz, jolloin suurimmat kehonosat resonoivat. Smith [12] kuitenkin toteaa, että myös psykologiset tekijät, kuten persoonallisuus ja kokemukset, vaikuttavat ihmisen värähtelyherkyyteen. Erityisen suuri merkitys on ihmisen asenteilla ja odotuksilla, sillä jos rakenteen oletetaan olevan jäykkä, pienikin liike voidaan kokea epämiellyttävänä. Toisaalta esimerkiksi teollisuuslaitoksissa värähtelyä voidaan pitää odotettavana, jolloin myös sallittu värähtelytaso on korkeampi.

Ihmiseen kohdistuvan värähtelyn vaikutukset ja niiden voimakkuus riippuvat liikkeen taajuudesta [43]. Taajuusalueen 0,5-80 Hz on havaittu vaikuttavan erityisesti terveyteen, mukavuuteen ja havainnointikykyyn. Tätä matalampitaajuinen värähtely voi puolestaan aiheuttaa niin sanottua matka- tai liikepahoinvointia, tuntua epämukavalta sekä vaikeuttaa tehtävien suorittamista. Vaikka tiedetään, että värähtelyn aiheuttamat tuntemukset ovat subjektiivisia, voidaan värähtelyherkyyden keskimääräinen riippuvuus taajuudesta selvittää. Näin on saatu selville esimerkiksi lähteissä [43] ja [6] esitetyt painotusarvot, joiden perusteella piirretty vaakasuuntaisen värähtelyn painotuskäyrä on esitetty kuvassa 22. Kun rakenteesta mitatut kiihtyvyydet kerrotaan painotusarvoilla, saadaan selville, kuinka voimakkaana värähtely eri taajuuksilla todellisuudessa koetaan. Koska tutkittavassa tilanteessa laitteen aiheuttama vaakasuuntainen heräte- ja siten myös värähtelytaajuus on 2,5 Hz, painotusarvo on kuvan 22 mukaan 0,8. Pystysuuntaista liikettä ei tämän työn laskelmissa huomioida.



**Kuva 22** Vaakasuuntaisen värähtelyn painotuskäyrä (perustuu lähteeseen [6]).

Lähteessä [6] luetelluista toimipaikoista tutkittava rakenne vastaa olosuhteiltaan lähinnä työpajaa, joten sille sallitaan korkeampi värähtelytaso kuin esimerkiksi asuin- tai toimistorakennuksille. Värähtelyn voimakkuutta rajoitetaan ihmisten mukavuudentunteen varmistamiseksi, mitä varten lähteessä [6] on määritetty kaksi erillistä raja-arvoa eli suositus- ja maksimi-arvo. Työpajaolosuhteissa vaakasuuntaisen kiihtyvyyden neliöllisen keskiarvon suositusraja-arvoksi on annettu  $0,029 \text{ m/s}^2$  ja maksimiraja-arvoksi  $0,058 \text{ m/s}^2$ , jolloin huippukiihtyvyyden arvot ovat vastaavasti  $0,041 \text{ m/s}^2$  ja  $0,082 \text{ m/s}^2$ . Huippukiihtyvyyden taajuuspainotettuja raja-arvoja havainnollistava kuvaaja on esitetty kuvassa 23.



**Kuva 23** Vaakasuuntaisen huippukiihtyvyyden taajuuspainotetut raja-arvot.

Jos värähtely on voimakkuudeltaan suositusraja-arvoa heikompaa, se ei todennäköisesti ole ihmisiä häiritsevää [6]. Kiihtyvyyden raja-arvona voidaan kuitenkin käyttää tätä korkeampaa maksimiarvoa, jos värähtely ei ole toistuvaa eikä yleistä, tai voimakas värähtely on muuten oikeutettua. Lisäksi todetaan, että ihmisen terveydelle haitallisen värähtelyn raja-arvot ovat edellä esitettyjä korkeampia, joten terveellisyysvaatimusta ei tarvitse erikseen huomioida [43]. Kuvan 23 perusteella todetaan, että taajuuden 2,5 Hz kohdalla huippukiihtyvyyden taajuuspainotettu suositusraja-arvo on  $0,05 \text{ m/s}^2$  ja maksimiraja-arvo  $0,1 \text{ m/s}^2$ . Oletetaan, että henkilöstön liikkuminen hoitotasolla on satunnaista, joten sallituksi värähtelyvoimakkuudeksi valitaan edellä esitetty maksimiraja-arvo. On myös huomioitava, että lähteen [43] mukaan värähtelyn voimakkuus tulee mitata ihmisen ja värähtelylähteen rajapinnasta eli tässä työssä kennon hoitotasolta.



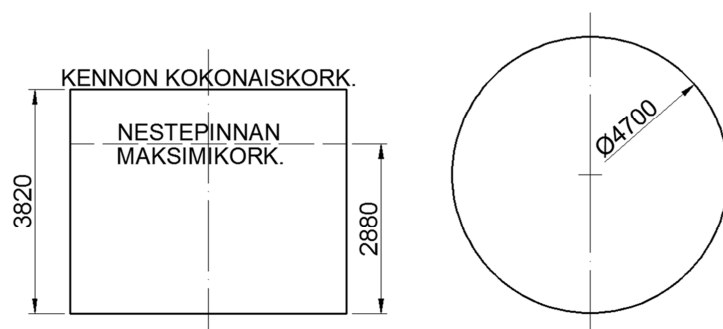
## 5 LASKENTAMENETELMÄT JA -PARAMETRIT

Tässä työssä tutkittava teräsrakenne on sekoittimilla varustettujen lietekennojen jalusta, johon kohdistuu staattisten kuormien lisäksi dynaamisia voimia, jotka aiheutuvat lietteen sekoitusprosessista. Varsinaisen tukirakenteen lisäksi laskennassa tulee huomioida kennojen ja niiden sisällön ominaisuudet, sillä ne vaikuttavat systeemin dynaamiseen käyttäytymiseen. Kohteesta riippuen tämänkaltaiset rakennesysteemit voivat erota toisistaan muun muassa geometrian ja kennojen massan osalta. Tässä työssä käsitellään kuitenkin esimerkkitapausta, jonka ominaisuudet on esitelty seuraavassa aliluvussa.

Tutkittavasta rakenteesta luodun laskentamallin on kuvattava systeemiä riittävän tarkasti, mutta sen on oltava kohtuullisen nopea mallintaa ja ratkaista. Lisäksi on valittava tilanteeseen soveltuvat laskentaparametrit ja -menetelmät, joilla tarvittavat suureet saadaan määritettyä. Tämän työn laskentaosiossa malli luodaan osittain luvussa 3 esitellyjen menetelmien perusteella, ja laskettujen suureiden vertailuarvot saadaan luvusta 4. Tässä luvussa käydään läpi kahden käytettävän FEM-ohjelmiston pääominaisuudet ja valitut parametrit. Varsinainen laskenta suoritetaan vasta luvussa 6, jossa myös esitellään ja vertaillaan saatuja tuloksia.

### 5.1 Tutkittava systeemi

Työssä tutkittavia teräksisiä kennoja, jotka ovat käytännössä sylinterimäisiä säiliöitä, käytetään muun muassa teollisuuden flotaatioprosesseissa. Sekä kennon koko että sekoitettavan lietteen tiheys, eli myös kennon ja sen sisällön yhteenlaskettu massa, vaihtelevat tilannekohtaisesti. Tässä työssä säiliön tehollinen tilavuus on  $50 \text{ m}^3$  ja sen sisällön tiheys  $1,8 \text{ t/m}^3$ . Lietteen oletetaan käyttäytyvän nestemäisen aineen tavoin. Säiliöiden myös ajatellaan olevan aina täynnä, eli lietteen pinnan taso pysyy muuttumattomana. Lisäksi kennon omaksi massaksi arvioidaan lähteen [44] perusteella noin 2 t. Kennoa ja lietettä koskevat tiedot on esitetty havainnekuvassa 24 sekä taulukossa 2.

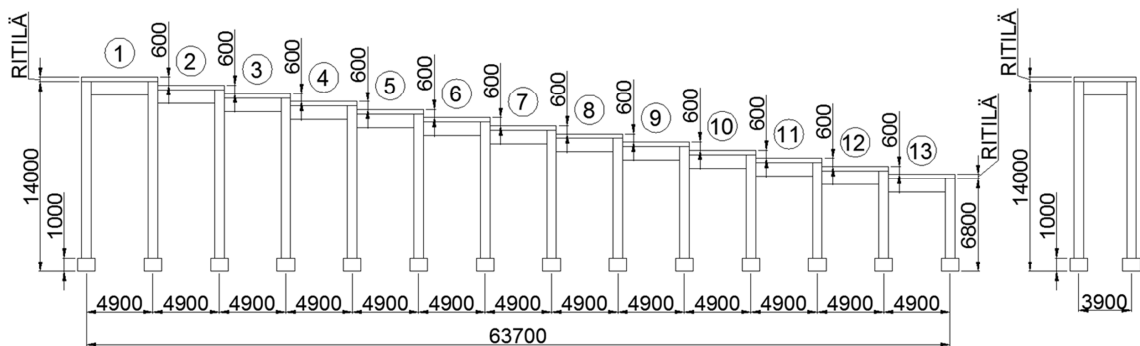


**Kuva 24** Tutkittava kenno.

**Taulukko 2** Kennon ja lietteen tiedot.

Kenno		
Efektiivinen tilavuus	$V_k$	50 m <sup>3</sup>
Halkaisija	$D_k$	4,70 m
Korkeus	$H_k$	3,82 m
Nestepinnan korkeus	$h$	2,88 m
Lietteen tiheys (max)	$\rho$	1,8 t/m <sup>3</sup>
Lietteen massa (max)	$M$	90 t
	=	90000 kg
Kennon oma massa	$M_k$	2 ton
	=	2000 kg

Kennot voidaan tarvittaessa asentaa vierekkäin, jolloin ne muodostavat niin sanotun sarjan. Kohteesta riippuen sarjassa olevien kennojen lukumäärä vaihtelee. Ne voidaan myös sijoittaa korkeussuunnassa keskenään samalle tasolle tai korkeusasema voi vaihtua porrastetusti. Tässä työssä tarkastellaan tilannetta, jossa kennoja on yhteensä 13 kappaletta ja jokainen sijaitsee eri korkeudella siten, että vierekkäisten kennojen jalustojen korkeusero on aina 0,6 m. Tukirakenteen päämittoja on havainnollistettu kuvassa 25.

**Kuva 25** Tutkittava jalustarakenne.

Kuvan 25 mukaisesti tukirakenteen ylin kohta on 14 metrin korkeudessa, josta peruspiilarin osuus on yksi metri. Jokaisen yksittäisen kennon tukirakenteen pituus on 4,9 m, joten rakenteen kokonaispituus reunimmaisten pilareiden keskilinjoilta mitattuna on 63,7 m. Pilareiden keskilinjojen välinen etäisyys leveyssuunnassa on puolestaan 3,9 m. Yksittäisen kennon tukirakenne koostuu neljästä pilarista, pituussuuntaisista palkeista ja niihin tukeutuvista poikkipalkeista sekä mahdollisista vinositeistä. Vinositeet ovat teoriassa päästään nivelellisesti kiinnitettyjä sauvoja, jotka välittävät ainoastaan puristus- ja vetovoimia. Tukirakenteen päällä on lisäksi teräksinen ritilä, joka jakaa säiliön painon poikkipalkeille. Ritilän kokonaismassaksi arvioidaan 3 t. Jalustarakenteen mitat ja muut tarvittavat tiedot on koottu taulukkoon 3.

**Taulukko 3** Jalustarakenteen tiedot.

<b>Jalustarakenne</b>		
Kennojen lukumäärä	$n$	13 kpl
Jalustan teräsosan korkeus (max)	$H_j$	13 m
Porrastus	$H_{por}$	0,6 m
Peruspilarin korkeus	$H_{pp}$	1,0 m
Yksittäisen jalustan pituus	$L_j$	4,9 m
Jalustarakenteen kokonaispituus	$L_{kok}$	63,7 m
Jalustarakenteen leveys	$B_j$	3,9 m
Alusritilän massa	$M_r$	3 t
	=	3000 kg
Jalustarakenteen vaimennus	$\xi$	2 %

Tutkittavien kennojen sisällä olevaa massaa sekoitetaan prosessin aikana pystyakselisillä roottoreilla. Todellisuudessa sekoittimien tehot ja pyörimistaajuuudet vaihtelevat kohteen mukaan, jonka lisäksi nopeudet muuttuvat asteittain käynnistys- ja sammutusvaiheissa. Tämän työn laskelmissa kuitenkin oletetaan, että sekoittimien pääasiallinen pyörimistaajuus, ja siten myös herätetaajuus, on vakio 2,5 Hz ja kaikki sekoittimet ovat keskenään samassa vaiheessa. Lisäksi tarkastellaan tätä pienemmillä taajuuksilla mahdollisesti esiintyviä värähtelyn huippuarvoja.

## 5.2 Laskentaohjelmat

Työssä käytettävät laskentaohjelmat ovat Autodesk Robot Structural Analysis Professional:in (Robot) versio 2014 sekä ANSYS ED 10.0 (Ansys), joka on ohjelman opiskelijaversio. Molemmat ohjelmat perustuvat elementtimenetelmään, ja niiden suurimmat eroavaisuudet ilmenevät käyttöliittymässä ja siinä, kuinka laaja-alaiseen laskentaan ne soveltuvat. Valtaosa tämän työn laskelmista tehdään Robotilla, joka on yleisesti käytetty laskentaohjelma rakennesuunnittelutoimistoissa. Ohjelman tarkastelu ja sopivien laskentaperiaatteiden muodostaminen on siten hyödyllistä käytännön suunnittelun kannalta. Ansyksen avulla osalle tuloksista saadaan vertailukohta, jotta ohjelmien luotettavuutta voidaan arvioida.

Laskentaohjelman käyttäminen vaatii suunnittelijalta tietoa niin rakenteiden kuin ohjelmankin käyttäytymisestä. Tässä työssä ohjelmien toimintoihin ei perehdytä syvästi, vaan ohjelmien perusominaisuudet sekä laskennassa käytettävät valinnat esitellään pääpiirteittäin. On kuitenkin huomattava, että käytettävät laskentaparametrit on aina valittava tapauskohtaisesti tutkittavan rakenteen ominaisuuksien ja kokoluokan perusteella. Todetaan myös, että osa aliluvuissa 5.2 ja 5.3 esitellyistä seikoista perustuu ohjelmien käyttöohjeiden lisäksi kirjoittajan käyttökokemuksiin.

### 5.2.1 Robot

Robot on erityisesti rakenteiden analysointiin ja suunnitteluun soveltuva ohjelma, joka perustuu elementtimenetelmään. Ohjelman avulla voidaan mitoittaa niin betoni- kuin teräsrakenteitakin staattisissa ja dynaamisissa mitoitustilanteissa. Rakenteen analysoinnin vaiheet ovat: geometrian ja rakenneosien luominen, kuormien ja kuormitusyhdistelmien määrittäminen, laskenta, tulosten tarkastelu ja analysointi sekä dokumentointi [45]. Käyttöliittymä on visuaalinen, ja laskentamallin luominen tai muokkaaminen tapahtuu pääasiassa valintaikkunoiden sekä taulukoiden avulla. Käytettävissä olevat elementtityypit, esimerkiksi palkit tai tasot, ovat ominaisuuksiltaan tavanomaisiin rakennesuunnittelun mitoitustilanteisiin soveltuvia. Ohjelman käyttöä helpottavat erityisesti sisäänrakennetut materiaali- ja teräsprofiilitietokannat sekä suunnittelukoodien vaatimukset, joihin mitoitettavaa rakennetta voidaan verrata.

Rakenteen ominaisvärähtelytaajuuksien ja -muodot saadaan ratkaistua moodianalyysillä. Robotissa tätä varten tulee määrittää muun muassa käytettävä massamatriisityyppi ja ominaisarvotehtävän ratkaisumenetelmä varsinaisen ratkaisualgoritmin lisäksi. Jos moodianalyysissä käytettävä massamatriisi on tyypiltään konsistentti eli jakautunut, suositellaan lähteessä [45] ratkaisualgoritmiksi skyline-ratkaisijaa. Muita valittavana olevia algoritmeja ovat harva suora ratkaisija (sparse direct solver) sekä iteratiiviset menetelmät. Kun ratkaisualgoritmina käytetään skyline-ratkaisijaa, moodianalyysin eli ominaisarvojen ratkaisemiseen voidaan valita Lanczosin menetelmä, lohkoaliavaruusiterointi (block subspace iteration), aliavaruusiterointi (subspace iteration) tai superelementtitekniikkaan perustuva menetelmä (basis reduction). Ominaisarvojen laskennassa ei huomioida rakenteen vaimennusta.

Jos halutaan ratkaista rakenteen dynaamisen vasteen amplitudi, soveltuvia analyysityyppejä Robotissa ovat muun muassa harmoninen, aikahistoria- ja taajuusvastefunktioanalyysi. Taajuusvastefunktioanalyysi (Frequency Response Functions, FRF) määrittää dynaamisen voiman aiheuttaman vasteen amplitudin eri herätetaajuuksilla ja tuloksista voidaan piirtää kuvaaja taajuuden funktiona. Taajuusvastefunktiota määritettäessä rakenteeseen asetetaan vaikuttamaan yksi tai useampi harmoninen voima, joiden on Robotin tapauksessa oltava samassa vaiheessa. Lisäksi laskentaa varten tulee valita tutkittava herätteen taajuusalue, rakenteen vaimennuskerroin ja se, kuinka monessa pisteessä harmoninen analyysi suoritetaan. Robot käyttää laskennassa automaattisesti moodien superponointimenetelmää (modal decomposition) [45].

Robotin dynaamisen analyysin menetelmistä ainoastaan aikahistoria-analyysi (Time History, TH) mahdollistaa eri vaiheissa olevien voimien mallintamisen. Analyysin tuloksena saadaan selville dynaaminen vaste eri ajanhetkinä. Herätteen muoto voidaan ilmoittaa matemaattisena funktiona, joka harmonisen voiman tapauksessa on esimerkiksi sinifunktio [45]. Pyörivä voima voidaan puolestaan mallintaa kahtena toisiaan vastaan kohtisuorassa suunnassa vaikuttavana voimana, joiden välillä on 90 asteen vaihe-ero.

Käytännössä toinen voimista noudattaa siis sini- ja toinen kosinifunktiota. Lisäksi aikahistoria-analyysille määritetään laskennassa tarkasteltavan ajanjakson pituus, tulosten tallentamistiheys sekä rakenteen vaimennuskerroin. Aikahistoria-analyysin ratkaisumenetelmiä ovat Newmarkin ja Hilber-Hughes-Taylorin menetelmät sekä moodien superponointi, joka on Robotin käyttämä oletusmenetelmä [45]. Newmarkin menetelmää suositellaan lähteessä [45] lyhyille aikahistoriatehtäville etenkin, jos rakenteeseen vaikuttava kuormitus on pistemäinen, mutta pitkien aikahistorioiden laskemiseen se on hyvin hidas. Ominaisarvotehtävää ei tarvitse ratkaista ennen kyseisen menetelmän käyttämistä. Moodien superponointi on puolestaan yksinkertainen menetelmä, joka perustuu värähtelymuotojen superpositioon, joten se edellyttää, että ominaisarvot ja -muodot on määritetty ensin.

Jos aikahistoria-analyysi ratkaistaan moodien superponointimenetelmällä, suositellaan lähteessä [45] sitä edeltävän ominaisarvotehtävän ratkaisemiseen Lanczosin menetelmää ja lisäksi Sturmin testiä, joka varmistaa, ettei ominaisarvoja jää havaitsematta. Lanczosin menetelmän sanotaan olevan tehokas ja robusti menetelmä myös suurille ominaisarvo-ongelmille. Menetelmällä on kuitenkin rajoituksia, koska sillä ei voida analysoida erillisiä rakenteita ja lisäksi massamatriisin on otettava huomioon kiertymävapausteet, eli massamatriisi ei voi olla keskitetty. Muilla mainituilla ominaisarvotehtävän ratkaisumenetelmillä ei tällaisia rajoituksia massamatriisin tai erillisten rakenteiden suhteen ole. Lohkoaliavaruusiterointia suositellaan Lanczosin tavoin suurille ominaisarvo-ongelmille noin 200 ominaispariin asti. Aliavaruusiterointi soveltuu puolestaan suurille rakenteille, joille ei tarvitse ratkaista montaa eli yli 40:tä ominaisparia [1, s. 305]. Jos taas halutaan saada selville ainoastaan tärkeimmät ominaismuodot likimääräisesti, voidaan käyttää superelementtitekniikkaan perustuvaa menetelmää [45]. Sen käyttö vaatii suunnittelijalta kokemusta dynamiikan laskentatehtävistä mutta voi oikein käytettynä yksinkertaistaa laskentaa huomattavasti, jolloin merkittävimmät ominaisparit saadaan selville tehokkaasti.

### 5.2.2 Ansys

Ansys on elementtimenetelmään perustuva ohjelma, joka soveltuu muun muassa staattiseen ja dynaamiseen rakenneanalyysiin sekä lämmön siirtymisen tai nesteiden käyttäytymisen tutkimiseen [46, s. 37-50]. Ongelman ratkaiseminen voidaan jakaa kolmeen vaiheeseen, jotka ovat esikäsittely, ratkaiseminen sekä jälkikäsittely. Esikäsittelyvaiheessa määritetään rakenteen geometria- ja materiaaliominaisuudet sekä elementtijako. Ratkaisuvaiheessa asetetaan kuormat ja tukiehdot, jonka jälkeen laskentaongelma ratkaistaan. Jälkikäsittelyssä laskelmien tuloksia, kuten siirtymiä tai voimia, voidaan analysoida diagrammien ja listojen avulla. Ansyksessa käskyt annetaan joko graafisen käyttöliittymän (Graphical User Interface, GUI) tai komentotiedoston välityksellä. Näistä graafinen menetelmä on helpompi omaksua, mutta komentotiedoston avulla mallia voi olla helpompi muokata ja syntyvä laskentatiedosto on kooltaan pienempi [46, s. 37-50].

Ansyksessa on valittavana yli 100 erilaista elementtityyppiä, kuten erityyppisiä sauva-, palkki- tai tasoelementtejä, jotka soveltuvat myös vaativien tilanteiden tutkimiseen [46, s. 37-50]. Käyttäjä määrittää valitsemilleen elementeille poikkileikkauksen geometriaominaisuudet numeroarvoina. Myös elementtien materiaalimalleja on lukuisia, kuten epälineaarisia, isotrooppisia tai lämpötilasta riippuvia materiaaleja, ja tarvittavat parametrit määritetään niille manuaalisesti. On huomattava, että ohjelmaan ei ole sisäänrakennettu yksikköjärjestelmää vaan käyttäjän on itse huolehdittava käyttämiensä yksiköiden johdonmukaisuudesta [46, s. 37-50].

Ominaisarvotehtävän ratkaisumenetelmäksi voidaan Ansyksessa valita muun muassa lohko-Lanczos (block Lanczos), aliavaruusiterointi, PowerDynamics tai damped (vaimennettu) -menetelmä. Tämän työn laskelmiin soveltuvat erityisesti lohko-Lanczos sekä aliavaruusiterointi, sillä ne ovat helppokäyttöisiä mutta tarkkoja menetelmiä [47]. Näistä kahdesta päädytään lohko-Lanczosiin, jonka sanotaan olevan nopeampi menetelmä, vaikkakin se käyttää laskennan aikana enemmän muistia. Ansyksen tapauksessa lohko-Lanczosin käyttämä ratkaisualgoritmi on lähteen [47] mukaan aina harva suora ratkaisija. Ratkaisumenetelmän lisäksi moodianalyysia varten tulee määrittää käytettävän massamatriisin tyyppi sekä etsittävien ominaistajuuksien lukumäärä. Vaimennuskertoimen Ansys huomioi laskennassa vain, jos ominaisarvotehtävä ratkaistaan damped-menetelmällä. Lähteessä [47] kuitenkin todetaan, että kyseistä menetelmää kannattaa käyttää ainoastaan erikoistilanteissa eli kun vaimennusta ei voida ongelman luonteen takia jättää huomioita.

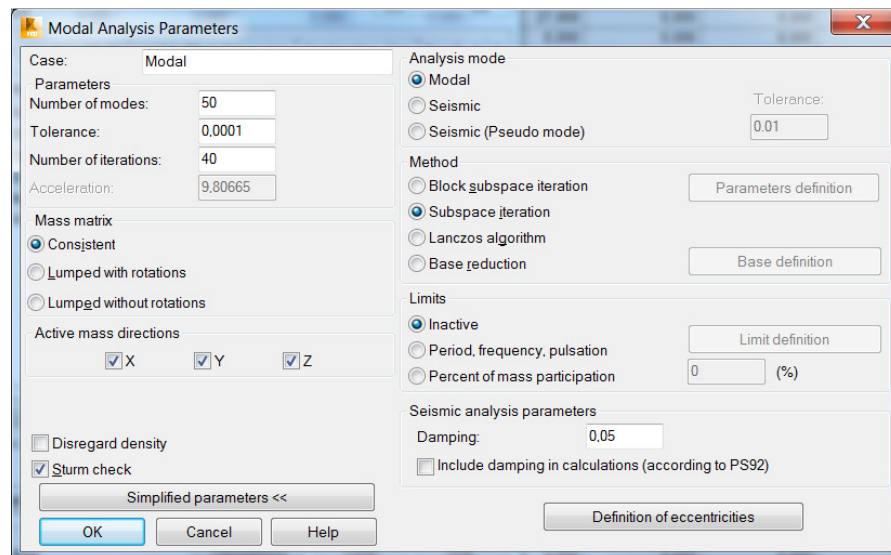
Moodianalyysin lisäksi dynamiikan ongelmia voidaan Ansyksessa tutkia esimerkiksi harmonisen, transientin ja vastespektrianalyysin avulla. Harmoninen analyysi piirtää systeemin taajuusvastefunktion, josta nähdään vasteen amplitudi eri herätetaajuuksilla [47]. Tyypillisesti resonanssitaaajuudet erottuvat piikkeinä taajuusvastefunktion kuvajassa. Ansyksen harmoninen analyysi vastaa siis Robotin taajuusvastefunktioanalyysia, ja myös sille on määritettävä vastaavat laskentaparametrit. Harmoninen analyysi voidaan suorittaa joko full- (täysi), reduced- (supistettu, perustuu superelementtitekniikkaan) tai moodien superponointimenetelmällä (mode superposition). Full-menetelmä on näistä helppokäyttöisin, kun taas muiden menetelmien etuja ovat muun muassa nopeus ja tehokkuus. Ratkaisualgoritmiksi voidaan puolestaan valita: rintamaratkaisija (frontal), Jacobin konjugaattigradientti (Jacobi conjugate gradient) tai epätäydelliseen Choleskyn hajotelmaan perustuva konjugaattigradientti (incomplete Cholesky conjugate gradient). Lähteessä [47] kolmiulotteisten rakenteiden harmonisen analyysin ratkaisemiseen suositellaan Jacobin konjugaattigradienttialgoritmia. Kyseinen algoritmi on valittavissa vain, jos harmoninen analyysi suoritetaan täydellä menetelmällä.

Harmonisessa analyysissa rakenteeseen voi kohdistua useita herätevoimia, mutta niillä kaikilla on oltava sama värähtelytaajuus [47]. Eri taajuuksilla värähtelevien voimien aiheuttamat dynaamiset vasteet on kuitenkin mahdollista yhdistää yhteenlaskuperiaatteen mukaisesti, jolloin saadaan selville voimien kokonaisvaikutus. Ansyksessa harmo-

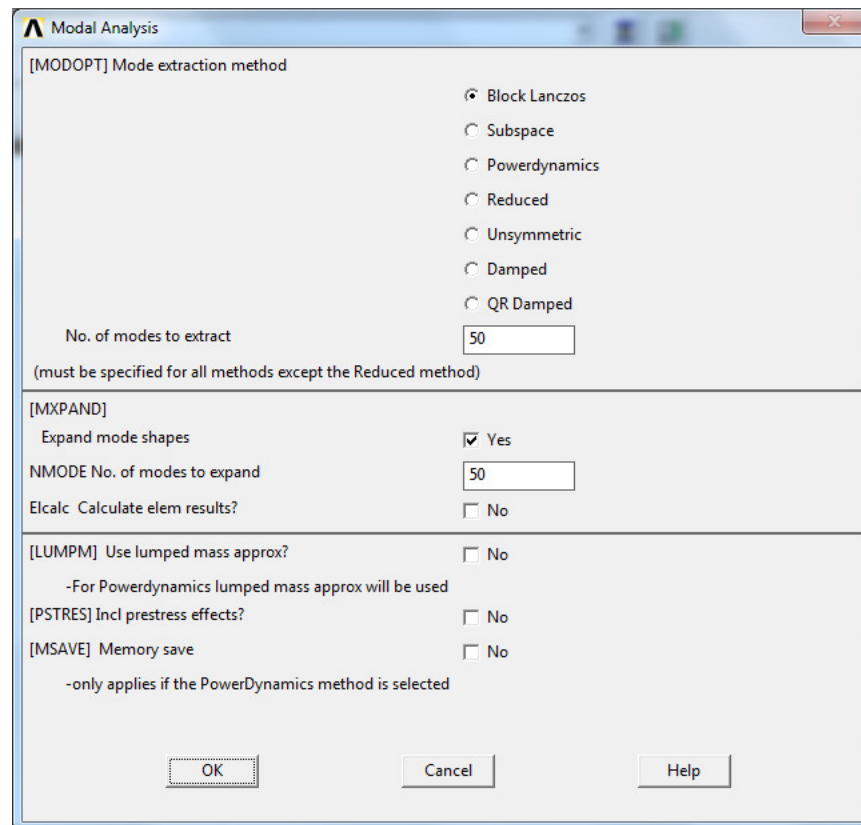
niset voimat määritetään kompleksiesityksenä, joka ilmaisee voiman maksimiampplitudin sekä eri voimien väliset vaihe-erot. Robotin tavoin pyörivä heräte mallinnetaan kahdena kohtisuorissa suunnissa vaikuttavana harmonisena voimana, joilla on 90 asteen vaihe-ero. Lisäksi analyysia varten on asetettava herätevoiman taajuusalue, jolle taajuusvastefunktion kuvaaja lopulta piirretään, sekä taajuusalueella tehtävien askelten lukumäärä eli käytännössä harmonisen analyysin laskentatiheys. Rakenteelle voidaan myös antaa joko herätetaajuudesta riippuva tai vakiona pysyvä vaimennuskerroin.

### 5.3 Laskentaparametrit

Rakenteen dynaaminen käyttäytyminen saadaan usein selville riittävän tarkasti, vaikka vain osa sen ominaistaajuuksista tiedettäisiin. Ominaismuotoja tulee kuitenkin määrittää niin monta, ettei merkittäviä muotoja, joissa suuri osa massasta värähtelee, jää havaitsematta. Tämä ehto täyttyy, kun ominaismuotoihin osallistuvien massojen osuus on yhteensä vähintään 90 % rakenteen massasta tutkittavissa suunnissa [2, s. 572]. Robotissa ja Ansyksessa värähtelyyn osallistuvan massan osuus ilmoitetaan suhteellisena summana tai kertyneenä massaosuutena (relative mass sum tai cumulative mass fraction). Tässä työssä ominaisvärähtelymuotoja lasketaan rakenteen koosta riippuen 50 tai 250 kappaletta, mikä todennäköisesti riittää merkittävien taajuuksien selvittämiseksi. Ominaisarvojen määrittämiseen käytetään konsistenttia massamatriisia, koska luvun 2 mukaan sen tulisi johtaa tarkempiin tuloksiin tutkittavan kaltaisissa tilanteissa. Molempien ohjelmien moodianalyysin valintaikkunat tämän työn mukaisin valinnoin on esitetty kuvissa 26 ja 27.



**Kuva 26** Moodianalyysin valintaikkuna, Robot.

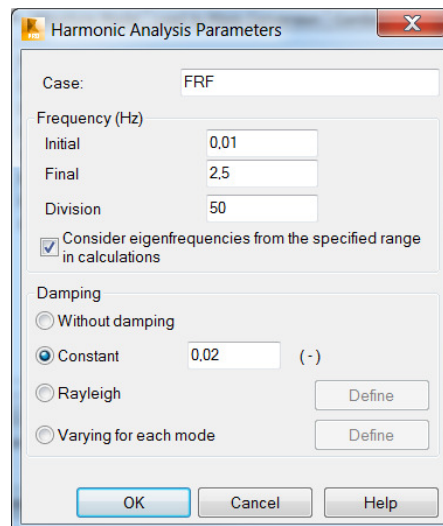


**Kuva 27** Moodianalyysin valintaikkuna, Ansys.

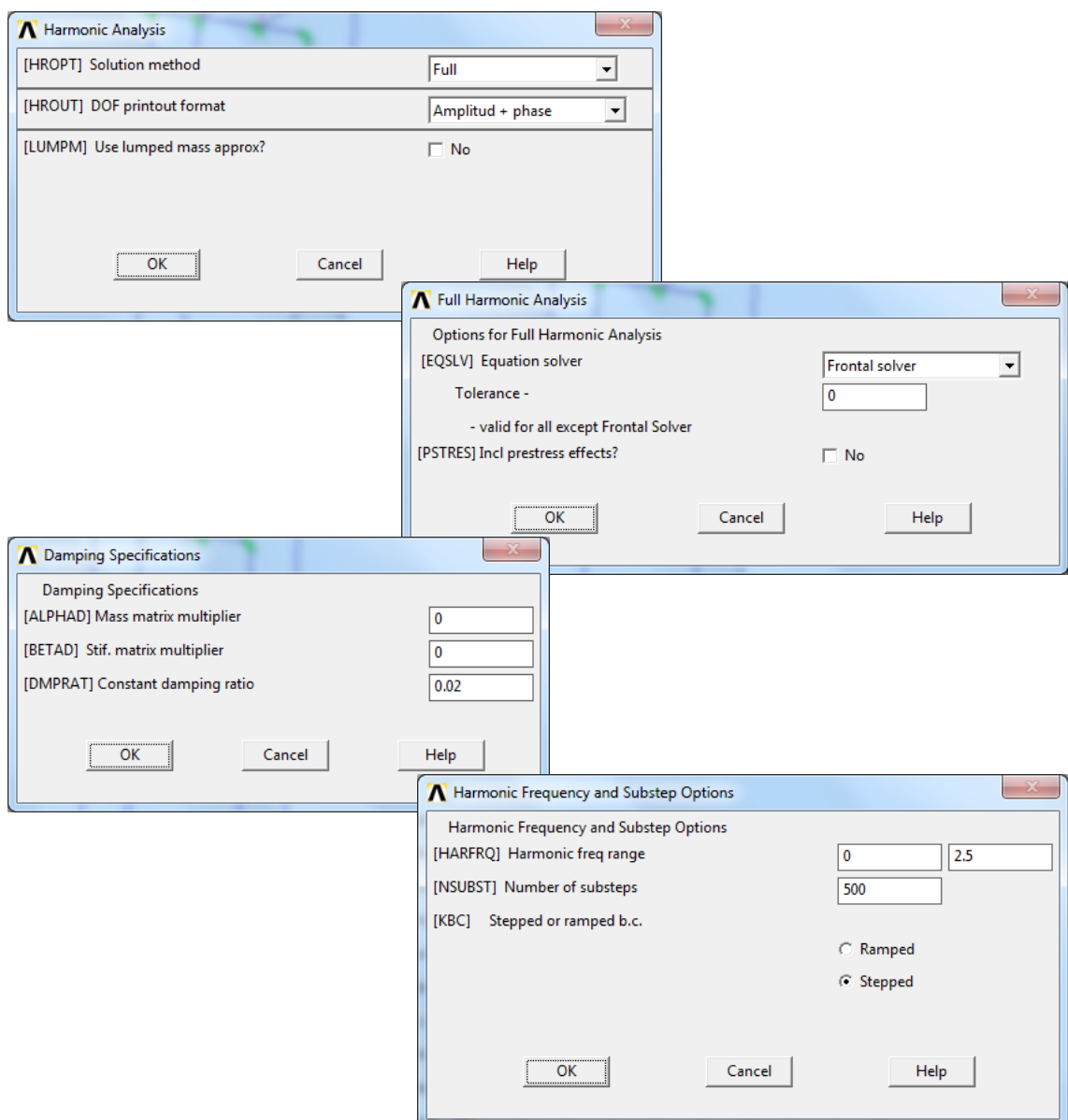
Aliluvussa 5.2.1 Robotin moodianalyysin laskentamenetelmäksi on suositeltu Lanczosin menetelmää, jos laskettuja ominaistajuuksia ja -muotoja käytetään myöhemmin moodien superponoinnin perustana. Tässä työssä ominaisarvotehtävä ratkaistaan kuitenkin aliavaruusiteroinnilla, koska Lanczosin menetelmän on havaittu johtavan usein laskennan keskeytymiseen. Näin käy etenkin, jos Lanczosin menetelmän yhteydessä käytetään Sturmin testiä. Jos taas Sturmia ei aktivoida, ominaistajuuksia jää havaitsematta.

Sekä Ansyskella että Robotilla tehtävässä harmonisessa tai taajuusvastefunktioanalyysissä tutkitaan taajuusaluetta 0-2,5 Hz. Näin saadaan selville dynaaminen maksimivaste tutkittavalla herätetaajuudella 2,5 Hz sekä havaitaan pienemmillä taajuuksilla esiintyvät amplitudien huippuarvot. Ansyksen tapauksessa kolmiulotteisen rakenteen harmonisen analyysin ratkaisumenetelmäksi on aikaisemmin suositeltu Jacobin konjugaattigradienttialgoritmia, mutta tutkittavassa tilanteessa sen on havaittu johtavan laskentavirheeseen. Tästä syystä ratkaisualgoritmiksi valitaan sen sijaan rintamaratkaisija. Robotin taajuusvastefunktioanalyysissä harmonisten herätevoimien on oltava samassa vaiheessa, eikä pyörivää pistevoimaa voida siten mallintaa. Tämän takia analyysi suoritetaan erikseen x- ja y-suuntaan. Robotin taajuusvastefunktioanalyysin ja Ansyksen harmonisen analyysin valintaikkunat, joihin on täytetty tässä työssä käytettävät valinnat, on esitetty kuvissa 28 ja 29.



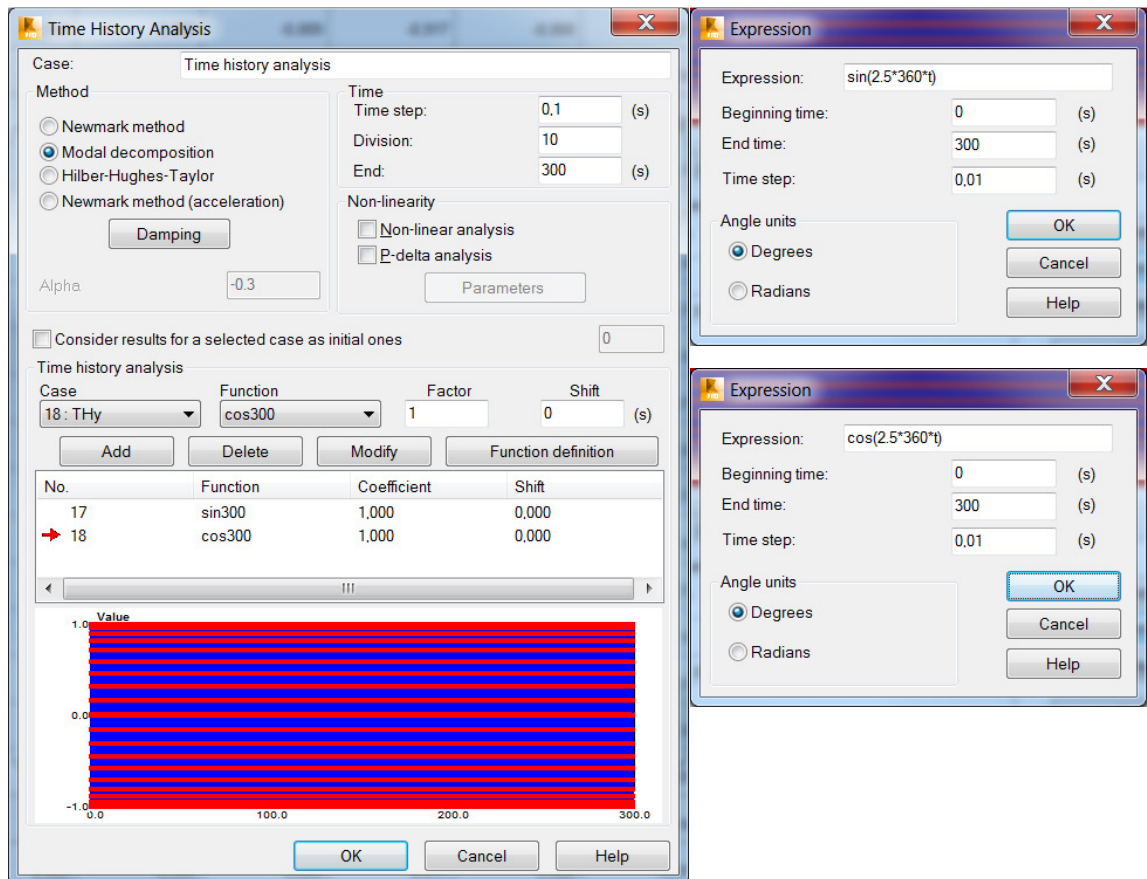


*Kuva 28 Taajuusvastefunktioanalyysin valintaikkuna, Robot.*



*Kuva 29 Harmonisen analyysin valintaikkunat, Ansys.*

Robotin aikahistoria-analyysin valintaikkunassa määritetään muun muassa käytettävä laskentamenetelmä, rakenteen vaimennuskerroin ja tutkittavan ajanjakson pituus. Rakenteeseen kohdistuvaan herätevoimaan lisätään myös tieto siitä, miten voiman suuruus vaihtelee ajan suhteen. Tutkittavassa tapauksessa vaakavoimat noudattavat joko sini- tai kosinifunktiota. Analyysin kestoksi valitaan 300 sekuntia, jotta vapaasta värähtelystä aiheutuva transientin vasteen osuus ehtii vaimentua tutkittavan ajanjakson aikana pois ja pysyvän vasteen arvot saadaan selville. Robotin aikahistoria-analyysin valintaikkunat ja työssä käytetyt parametrit ovat kuvan 30 mukaisia.



**Kuva 30** Aikahistoria-analyysin valintaikkunat, Robot.

On huomioitava, että laskentamenetelmän ja -parametrien valintaan vaikuttaa muun muassa tarkasteltavan kohteen kokoluokka, joten tässä työssä käytetyt valinnat eivät välttämättä ole optimaaliset edes kaikissa vastaavissa kohteissa. Molemmissa käytettävissä laskentaohjelmissa on myös huomattava määrä sellaisia ominaisuuksia, kuten osa kuvien 26-30 parametreista, joita ei ole tarkemmin esitelty. Tällaisiin kohtiin on tämän työn laskelmissa jätetty ohjelmien oletusvalinnat, mutta todellisuudessa suunnittelijan on aina määritettävä kaikkien parametrien arvot tilannekohtaisesti.

## 5.4 Systeemin mallinnusperiaatteet

Tutkittava systeemi koostuu useasta erilaisesta komponentista, joiden ominaisuuksia ja käyttäytymistä laskentamallin tulee kuvata riittävän tarkasti. Tarkasteltava teräsrakenne voidaan esittää yksinkertaisena palkkielementeistä koostuvana mallina, jolle määritetään rakenteen geometria sekä rakenneosien materiaalit ja profiilit, jotka valitaan alustavasti staattisen mitoituksen perusteella. On huomattava, että tässä työssä teräsrakenteiden mitoitukset suoritetaan ainoastaan Robotin avulla, mutta todellisuudessa laskelmat on hyvä tarkastaa, ainakin suuruusluokkatasolla, esimerkiksi käsin laskemalla.

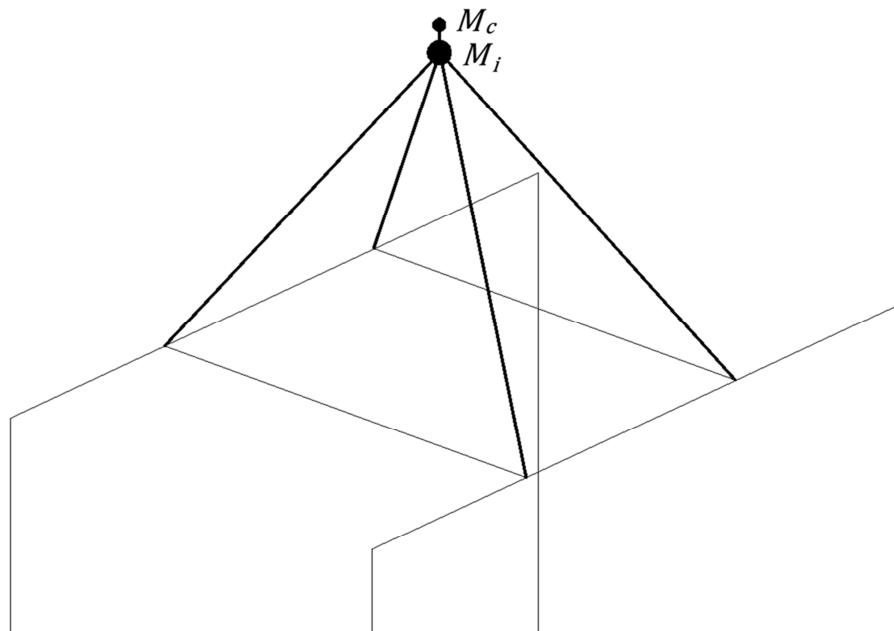
Tutkittavan jalustarakenteen kiinnitys perustuksiin oletetaan jäykäksi, eli peruspilareiden ja maan joustoa ei huomioida. Tukirakenteen päällä kuvan 25 mukaisesti oleva ritilä mallinnetaan Robotissa cladding-tasona, joka ei jäykistä rakennetta, vaan ainoastaan jakaa ritilän oman painon sen alla oleville poikittaissuuntaisille palkeille. Ritilän paino on  $1,54 \text{ kN/m}^2$ , ja dynaamista analyysia varten tämä tasainen kuorma on muutettava massaksi load to mass conversion -toiminnon avulla. Ansyksessa ritilän paino lisätään suoraan poikkipalkkien pituusmassaan, eikä ritilää kuvaavaa tasoa siis mallinneta.

Kennoissa oleva liete mallinnetaan luvun 3 mukaisena ekvivalenttina mekaanisena systeeminä, jossa säiliön sisältö jaetaan impulsiiviseen ja konvektiiviseen komponenttiin. Komponenttien massat ja vaikutuskorkeudet sekä konvektiivisen komponentin jousivakio lasketaan kaavoista (58)-(63). Lisäksi kennon oma paino ja sisällön hitausmomentti  $J$  lisätään impulsiivisen pistemassan kohdalle. Hitausmomentti määritetään impulsiivisen massapisteen suhteen kuten jäykälle sylinterille, jonka halkaisija on kennon halkaisija ja korkeus yhtä suuri kuin nesteen pinnan korkeus pohjasta mitattuna. Näin laskettuna hitausmomentin arvo on todellista eli nestemäisen aineen hitausmomenttia suurempi. Kennon sisällön mallintamista koskevat arvot on koottu taulukkoon 4.

**Taulukko 4** Ekvivalentin mekaanisen mallin parametrit.

Kennon sisällön mallintaminen		
Impulsiivinen: massa	$M_i$	56586 kg
Impulsiivinen: korkeus	$h_i$	1,93 m
Impulsiivinen: vaimennuskerroin	$\xi$	2 %
Hitausmomentti (impulsiivisen suhteen)	$J_x J_y$	214911 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Hitausmomentti (impulsiivisen suhteen)	$J_z$	254035 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Kennon oma massa	$M_k$	2000 kg
Konvektiivinen: massa	$M_c$	27703 kg
Konvektiivinen: korkeus	$h_c$	1,99 m
Konvektiivinen: vaimennuskerroin	$\xi$	0,5 %
Konvektiivinen: 1. ominaiskulmataajuus	$\omega^2$	7,50 $1/\text{s}^2$
Konvektiivinen: jousivakio	$k_c$	207816 N/m

Impulsiivisen komponentin liittyminen tukirakenteeseen mallinnetaan molemmissa laskentaohjelmissa massattomien ja äärettömän jäykkien palkkielementtien avulla. Elementit kiinnittyvät tukirakenteen palkkien liitoskohtiin vinosti kuvan 31 mukaisesti. Impulsiivisen ja konvektiivisen massan välillä oleva pystysuora jousi mallinnetaan myös massattomana tankona, mutta sen jäykkyys vaaka- ja pystysuunnassa vastaa taulukossa 4 esitettyä arvoa  $k_c$ . Palkkielementtien poikkileikkaukset sekä impulsiivisen että konvektiivisen komponentin tapauksessa ovat samoja, ja niiden jäykkyydet saadaan sopiviksi kimmokertoimien arvoja muuttamalla. On huomattava, että kun impulsiivinen pistemassa liittyy tukirakenteen ylätasoon jäykkien palkkielementtien välityksellä, kuten edellä on esitetty, elementit jäykistävät rakennetta. Tämä rakennemalli on kuitenkin tarkoituksenmukainen, sillä todellisuudessa tason päällä oleva kenno kasvattaa tukirakenteen jäykkyyttä.



**Kuva 31** Impulsiivisen ja konvektiivisen pistemassan liittäminen tukirakenteeseen.

Rakenneosat ovat materiaaliltaan lujuusluokan S355 terästä. Robotissa teräksen materiaaliominaisuudet, kuten lujuus ja kimmokerroin, saadaan automaattisesti ohjelman materiaalitietokannasta ja näitä samoja arvoja käytetään myös Ansyksen laskentamallissa. Impulsiivisen ja konvektiivisen komponentin liitoselementtien materiaaliominaisuudet muokataan teräksen arvoista kasvattamalla tai pienentämällä kimmokerrointa. Taulukoon 5 on koottu laskentamalleissa käytettävien elementtien perustiedot molempien laskentaohjelmien tapauksessa. Taulukkojen 3 ja 4 mukaan sekä tukirakenteen että impulsiivisen komponentin vaimennuskerroin on 2 % mutta konvektiivisen komponentin vain 0,5 %. Konvektiivisen pistemassan osuus systeemistä on kuitenkin pieni, joten koko rakenteen vaimennuskertoimenä käytetään 2 %:a.

**Taulukko 5** Laskentamalleissa käytettävien elementtien tiedot.

	Robot	Ansys	HUOM.
<b>Rakenneosat</b>			teräs: S355, $E=210$ GPa
palkit	palkkielementti	BEAM4	kiertymät vapautettu päissä
pilarit	palkkielementti	BEAM4	
jäykisteet	palkkielementti	-	
alusritilä	cladding-taso + tasainen kuorma	massa poikkipalkeille	
<b>Pistemassat</b>			
liitos välillä jalusta - $M_i$	palkkielementti	BEAM4	$E=21000$ GPa $A=58997$ mm <sup>2</sup> $I_y=I_z=6,989 \cdot 10^7$ mm <sup>4</sup> , $I_x=0$
liitos välillä $M_i - M_c$	palkkielementti	BEAM4	$E=0,00021$ GPa $A=58997$ mm <sup>2</sup> $I_y=I_z=6,989 \cdot 10^7$ mm <sup>4</sup> , $I_x=0$
pistemassat	added mass (nodes)	MASS21	arvot ks. taulukko 4

Rakenteeseen kohdistuvan herätevoiman oletetaan käyttäytyvän kuten pistevoima, joka pyörii kennon pysty akselin ympäri vakiotaaajuudella. Voiman amplitudi on 1 kN ja taajuus 2,5 Hz. Kuten aikaisemmin on mainittu, käytännössä pyörivä voima mallinnetaan kahtena kohtisuorassa suunnassa vaikuttavana harmonisena pistevoimana, joiden välillä on 90 asteen vaihe-ero. Voima asetetaan vaikuttamaan samaan solmupisteeseen, jossa impulsiivinen massakomponentti sijaitsee. Kuten luvussa 4 on todettu, dynaaminen herätevoima aiheuttaa värähtelyä, jota on rajoitettava laitteen toimintakyvyn sekä henkilöstön turvallisuuden ja mukavuudentunteen takaamiseksi. Näillä perusteilla määritetyt vasteiden raja-arvot on koottu taulukkoon 6. On todettu, että systeemin siirtymä- ja nopeusvasteet tulisi mitata sekoittimen yläreunan korkeudelta ja kiihtyvyysvaste rakenteen hoitotasolta. Yksinkertaistuksen vuoksi vasteet määritetään tässä työssä kuitenkin impulsiivisen pistemassan kohdalta.

**Taulukko 6** Vasteiden raja-arvot.

Vasteiden raja-arvot					
Laite			Henkilöstö		
Sallittu siirtymä	$u_{max}$	0,052 mm	Sallittu kiihtyvyys	$a_{max}$	0,1 m/s <sup>2</sup>
Sallittu nopeus	$v_{max}$	3 mm/s		=	100 mm/s <sup>2</sup>
Mittauspiste: pistemassa $M_i$					

Erityisesti rakenteen staattisen mitoituksen kannalta on huomattava, että esitetty mallinustapa ei jaa kennon kuormaa poikkipalkkeille, kuten todellisuudessa tapahtuu. Tästä johtuen staattisessa mitoitustilanteessa impulsiivinen ja konvektiivinen pistemassa korvataan tukirakenteen poikkipalkkeihin kohdistuvilla viivakuormilla, joiden suuruus vastaa täyden kennon kokonaismassaa. Todetaan myös, että kaikissa tämän työn laskelmissa kuormat määritetään suoraan ilmoitettujen lukuarvojen perusteella, eikä niitä siis kerrota osavarmuuskertoimilla. Rakenneosien mitoituksessa Robot käyttää kuitenkin eurokoodin mukaisia materiaalien osavarmuuslukuja ja mitoitusmenetelmiä.

## 6 LASKENTA JA TULOKSET

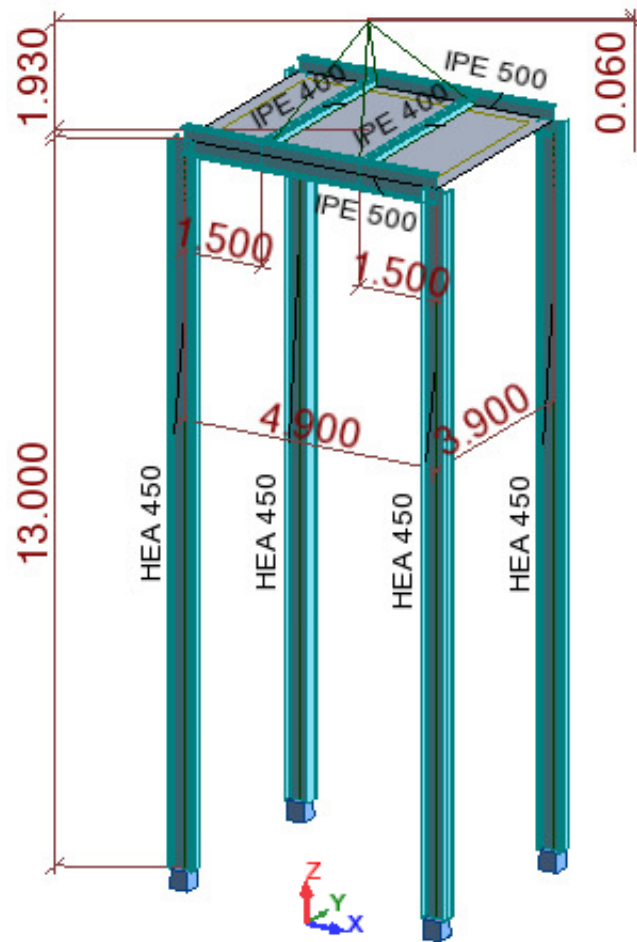
Työn laskentaosio jaetaan kahteen osaan. Ensin analysoidaan pieni rakennesysteemi, käytännössä yksi kenno tukirakenteineen, jonka avulla on helppo havainnollistaa käytettäviä mallinnusperiaatteita. Pienellä laskentamallilla tutkitaan mallinnustavan toimivuutta sekä vertaillaan Robotin taajuusvastefunktio- ja aikahistoria-analyysin tuloksia. Lisäksi tarkastellaan erilaisten vinosidetyyppien vaikutusta systeemin käyttäytymiseen sekä mitoitetaan rakenne ominaistaajuusvaatimuksen perusteella. Yksi tutkittavista rakenteista mallinnetaan ja analysoidaan myös Ansyskella, jotta eri ohjelmilla saatuja tuloksia voidaan vertailla ja arvioida.

Laskennan toisessa osassa samoja mallinnusperiaatteita sovelletaan suurempaan rakenteeseen, joka on esitelty tarkemmin aliluvussa 5.1. Kyseistä rakennetta tutkitaan ainoastaan Robotin avulla käyttäen hyväksi pienemmän mallin avulla tehtyjä johtopäätöksiä. Lopulta laskelmien tuloksia eli siirtymän  $u$ , nopeuden  $v$  ja kiihtyvyyden  $a$  arvoja verrataan taulukon 6 raja-arvoihin. Käsiteltävät laskentamallit luodaan ja analysoidaan luvussa 5 esitettyjen periaatteiden mukaisesti, jos toisin ei mainita. Rakenneosien profiileina käytetään joko valssattuja avoprofiileita tai jäykisteiden tapauksessa rakenneputkia.

### 6.1 Yksittäinen jalusta: laskentamallit ja analyysityypit

Tutkittavan rakenteen geometriatiedot on esitetty kuvassa 32. Rakenne mitoitetaan ensin staattisten kuormien perusteella, jolloin saadaan selville rakenneosien alustavat profiilit. Palkkien taipuma rajoitetaan arvoon  $L/400$ , jossa  $L$  on palkin pituus. Jotta poikkipalkit saadaan mitoitettua kennon massasta aiheutuvalle kuormalle, impulsiivista ja konvektiivista massapistettä ei mallinneta vaan kennon ja sen sisällön kokonaismassaa vastaava viivakuorma  $115,71 \text{ kN/m}$  lisätään suoraan poikkipalkeille. Staattisessa tilanteessa rakenteeseen ei kohdistu rakenneosien omien painojen lisäksi muita kuormia eikä rakenteiden tai liitosten mahdollisia epäkeskisyyksiä huomioida.

Ensimmäiseksi tutkitaan kehärakennetta, jonka pilareiden oletetaan toimivan mastoina, eli niiden liitokset perustuksiin ovat täysin jäykkiä. Tällä periaatteella mitoitettujen rakenteen profiilit ovat kuvan 32 mukaisia. Lisäksi tutkitaan erilaisia vinosideratkaisuita, joita on havainnollistettu liitteen A kuvassa 37. Jäykistetyissä kehissä pilareiden oletetaan olevan nivelellisesti kiinnitettyjä sekä alapäistään että vinositeiden liitoskohdista. Eri-tyyppiset vinositeet mitoitetaan staattisille kuormille erikseen, mutta pilareiden profiilit ovat kaikissa jäykistetyissä rakenteissa samoja.



**Kuva 32** Yksittäisen jalustarakenteen mitat ja profiilit, kun pilarit toimivat mastoina.

Tutkittavat laskentamallit analyysityypeineen on esitetty taulukossa 7, jossa FRF on lyhenne taajuusvastefunktioanalyysistä (Frequency Response Function), TH on aikahistoria-analyysi (Time History) ja Harmonic tarkoittaa Ansyksen harmonista analyysia. Lisäksi kaikista rakennemalleista tehdään moodianalyysi ominaistajuuksien selvittämiseksi. Tapauksista ensimmäinen on staattiseen mitoituseseen perustuva jäykistämätön rakenne. Kyseistä rakennetta tutkitaan sekä aikahistoria- että taajuusvastefunktioanalyysillä, jotta voidaan vertailla analyysityypin ja erityisesti herätevoiman mallintamistavan vaikutusta tuloksiin. Lisäksi lasketaan vertailuarvot Ansyksen harmonisella analyysillä. Muissa laskentamalleissa 2-4 joko rakenteen mitoitusperiaate tai mallinnustapa poikkeaa ensimmäisestä tapauksesta ja niiden analysointiin käytetään ainoastaan Robotin taajuusvastefunktioanalyysia. Kaikkien tutkittavien rakenteiden kuvat on koottu liitteeseen A.



**Taulukko 7** Tutkittavat laskentamallit 1-4.

Nro	Tukirakenteen mitoitus	Nesteen mallinnus	Analyysityyppi
1	staattinen: mastopilarit	ekvivalentti mekaaninen malli	FRF (Robot) TH (Robot) ANSYS Harmonic
a)			
b)			
c)			
2	staattinen: mastopilarit	pistemassa (keskipisteessä)	FRF
3	staattinen: vinojäykisteet	ekvivalentti mekaaninen malli	
a)	diagonaali		FRF
b)	X-siteet		FRF
c)	2 krt. X-siteet		FRF
d)	epätäydelliset ansaat		FRF
4	ominaistaajuusvaatimus	pistemassa (keskipisteessä)	FRF

Ensimmäiseksi tarkastellaan laskentamallia 1, jossa teräsrunko on jäykistämätön ja liete mallinnetaan ekvivalentin mekaanisen mallin mukaisina pistemassoina. Liitteen B kuvassa 39 on Robotin taajuusvastefunktioanalyysin kuvaaja, johon on piirretty impulsiivisen massapisteen siirtymävasteen amplitudi x- ja y-suunnassa. Saman liitteen kuvassa 40 on puolestaan esitetty vastaavan laskentamallin Ansysella ratkaistu taajuusvastefunktion kuvaaja. Molemmilla ohjelmilla ratkaistut vasteiden amplitudit taajuuden 2,5 Hz kohdalla ja niiden maksimiarvot koko tutkitulla taajuusalueella on koottu myöhemmin taulukon 8 osioihin 1a ja 1c.

Tarkastellaan vielä ensimmäistä rakennetta aikahistoria-analyysin avulla. Liitteen B kuvassa 41 on esitetty aikahistoria-analyysin kuvaaja, johon on piirretty impulsiivisen pistemassan siirtymävaste x- ja y-suunnassa 300 sekuntiin asti. Kuvaajasta voidaan havaita, että tutkitavan ajanjakson alkuvaiheessa heilahtelu on melko suurta mutta värähtelyn jatkuessa sen amplitudi pienenee ja lopulta vakiintuu. Tämä johtuu siitä, että ajan kuluessa transientin värähtelyn osuus vaimenee pois ja rakenne saavuttaa pysyvän värähtelyn tilan, jolloin maksimivaste on jokaisen jakson aikana yhtä suuri. Robotista saa selville myös vasteiden taulukkoarvo, joita tarkastelemalla on havaittu, että amplitudit ovat täysin vakiintuneet, kun värähtely on jatkunut noin 250 sekunnin ajan mutta jo 80 sekuntia aikaisemmin vaihtelu on erittäin satunnaista ja vähäistä. Tässä laskentatapauksessa aikahistoria-analyysia on siten hyvä jatkaa vähintään 170 sekuntiin asti. On kuitenkin huomattava, että tutkitavan rakenteen ominaisuudet ja etenkin sen vaimenuskertoimen vaikuttavat transientin värähtelyn vaimenemisnopeuteen ja siten analyysin tarvittavaan keston. Aikahistoria-analyysillä ratkaistut pysyvän värähtelyn maksimivasteet herätetaajuudella 2,5 Hz on poimittu taulukon 8 kohtaan 1b.

Seuraavassa tarkastelussa kenno ja sen sisällä oleva liete mallinnetaan ekvivalentin mekaanisen mallin sijaan yhtenä, täyden säiliön suuruisena pistemassana. Pistemassa sijait-

see kennon tehollisen tilavuuden painopisteessä, jonka suhteen myös hitausmomentit määritetään. Massapisteen oletetaan olevan jäykästi kiinni tukirakenteessa, joten niiden välinen liitos mallinnetaan samalla tavalla kuin impulsiivisen massakomponentin tapauksessa. Lisäksi herätevoiman vaikutuspiste siirretään impulsiivisen pistemassan kohdalta kennon tehollisen tilavuuden painopisteeseen, josta myös vasteiden arvot määritetään. Tämän laskentamallin 2 taajuusvastefunktion kuvaaja on esitetty liitteen B kuvassa 42 ja tutkittavat amplitudit taulukossa 8.

Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa tutkittavan kehän jäykkyys on perustunut mastoina toimiviin pilareihin. Seuraavaksi tarkastellaan kuitenkin rakenteita, jotka jäykistetään erityyppisillä vinositeillä. Tutkittavat vinosidetyypit ovat: diagonaali- ja X-siteet, kaksinkertaiset X-siteet sekä epätäydelliset diagonaaliansasjäykisteet, joiden epäkeskisyys pilarin yläpäästä on yksi metri. Analysoitavat rakenteet 3a-3d mitoitetaan ensin staattisten kuormien perusteella kuitenkin siten, että kaikissa kehissä pilari- ja palkkiprofiilit ovat keskenään samoja. Jäykisteiden putkipoikkileikkaukset puolestaan valitaan staattisen mitoituksen perusteella jokaiselle kehälle erikseen, mutta yksinkertaistuksen vuoksi profiilit ovat samoja x- ja y-suunnassa. Tutkittavien rakenteiden 3a-d taajuusvastefunktioiden kuvaajat impulsiivisen pistemassan kohdalla ovat liitteen B kuvien 43-46 mukaisia ja vasteiden amplitudit samassa pisteessä on koottu taulukkoon 8.

Kuten luvussa 4 on todettu, tässä työssä käsiteltävät rakenteet on perinteisesti suunniteltu ominaistaajuusvaatimuksen perusteella, joka tarkoittaa, että rakenteen alimman ominaistaajuuden on oltava 25 % herätetaajuutta suurempi. Laskentamallin 4 tarkoituksena on selvittää, millainen rakenne täyttää tämän vaatimuksen. Kenno ja sen sisältö mallinnetaan tehollisen tilavuuden keskipisteessä sijaitsevana pistemassana mallin 2 tavoin, ja rakennetta jäykistetään siten, että systeemin alin ominaistaajuus on suurempi kuin 3,13 Hz. Ominaistaajuusvaatimuksen täyttävää rakennetta on havainnollistettu liitteen A kuvassa 38. Kuvasta nähdään, että kehän pystysuuntaisten jäykisteiden lisäksi rakenteen vaakasuuntaiselle tasolle on lisätty vinositeet ja myös palkkien profiilit ovat muita rakenteita suuremmat. Näin on estetty matalat ominaistaajuudet, jotka aiheutuvat tason suuntaisesta joustavuudesta. Vertailun vuoksi kyseisen rakenteen värähtelytaso määritetään taajuusvastefunktioanalyysillä mutta poikkeuksellisesti taajuusalueella 0-5,0 Hz. Analyysin perusteella piirretty kuvaaja on esitetty liitteen B kuvassa 47 ja amplitudienv arvot taulukossa 8 mallin 4 kohdalla.

Vaikka analyysin päätavoitteena olisi selvittää rakenteen värähtelytaso tietyllä herätetaajuudella, kannattaa myös rakenteen ominaistaajuudet ja -muodot aina määrittää. Ominaisvärähtelyä tarkastelemalla voidaan saada selville haitalliset herätetaajuudet, sillä jos jokin rakenteen ominaistaajuuksista on hyvin lähellä siihen kohdistuvan herätteen taajuutta, rakenteen värähtely aiheuttaa todennäköisesti ongelmia. Ominaistaajuuksien perusteella havaitaan siten myös yksittäisten sauvojen haitallinen resonointi, joka ei välttämättä tule ilmi koko rakenteen siirtymiä tutkittaessa. Toisaalta ominaismuotojen perusteella on mahdollista päätellä, miten ominaistaajuuksia voidaan siirtää rakennetta

muuttamalla. Koska ominaismuoto kertoo, millä tavalla rakenne pyrkii taipumaan vastaavalla ominaistaajuudella värähdellessään, ominaistaajuuksia voidaan kasvattaa tehokkaasti sopivia jäykisteitä lisäämällä. Liitteeseen C on koottu kaikkien tutkittavien laskentamallien 1-4 ominaistaajuudet, jotka on sijoitettu sarakkeisiin siten, että varsinaiset ensimmäiset ominaistaajuudet ovat samalla rivillä. Mallinnustavasta johtuvia ja käytännössä massattomia ominaismuotoja, joita Robotin tuloksissa esiintyy, ei siis huomioida.

## 6.2 Yksittäinen jalusta: päätelmät

Taulukkoon 8 on koottu tutkittujen laskentamallien dynaamisten vasteiden eli siirtymän, nopeuden ja kiihtyvyyden amplitudit  $x$ - ja  $y$ -suunnassa. Vasteet on määritetty joko impulsiivisen pistemassan kohdalta tai laskentamallien 2 ja 4 tapauksessa kennon tehollisen tilavuuden painopisteestä. Taulukossa jokaisen mallin tulokset on koottu allekkain siten, että ensimmäisellä rivillä on aina vasteiden amplitudit herätetaajuudella 2,5 Hz ja kaksi tai kolme seuraavaa riviä ilmoittavat amplitudiin maksimi-arvot  $x$ - ja  $y$ -suunnassa sekä millä herätetaajuudella ne syntyvät. Kategorioiden pienimmät arvot on korostettu punaisella ja suurimmat sinisellä taustavärillä. Seuraavaksi vertaillaan eri rakennemallien ja analyysityyppien tuloksia taulukon 8 sekä liitteiden B ja C perusteella.

Kun tarkastellaan eri ohjelmien ja menetelmien tuottamia tuloksia ensimmäisen rakenteen tapauksessa eli laskentamalleja 1a-c, havaitaan niiden vastaavan toisiaan hyvin. Robotin aikahistoria- ja taajuusvastefunktioanalyysillä määritetyt siirtymän ja nopeuden arvot ovat identtiset. Myös kiihtyvyyksien välillä erot ovat lähes mitättömiä. Vaikka taajuusvastefunktioanalyysi ei mahdollista pyörivän voiman mallintamista, vaikuttaa se ainakin tämän rakenteen tapauksessa siis tuottavan vastaavia tuloksia aikahistoria-analyysiin verrattuna. Tämä on toivottava tilanne, sillä taajuusvastefunktioanalyysi on menetelmistä helppokäyttöisempi ja myös sen vaatima laskenta-aika on huomattavasti lyhyempi.

Mallin 1c tapauksessa vasteiden amplitudit on ratkaistu Ansysin harmonisella analyysillä. Herätetaajuuden ollessa 2,5 Hz amplitudiin arvot ovat hieman suuremmat kuin Robotilla laskettuna mutta erot ovat käytännössä merkityksettömiä. Myös pienemmillä taajuuksilla esiintyvät amplitudiin huippuarvot sekä taajuusvastefunktioiden kuvaajat vastaavat toisiaan hyvin. Ohjelmilla laskettuja ominaistaajuuksia vertaillaan seuraavaksi liitteen C avulla. Kuten aikaisemmin on todettu, Robotilla laskettu alin ominaistaajuus on käytännössä merkityksetön. Tämä johtuu siitä, että kyseinen ominaistaajuus aiheutuu konvektiivisen pistemassan kiertymisestä  $z$ -akselin ympäri, mitä ei käytännön tilanteessa luonnollisesti tapahdu. Ansysin tuloksissa tällaisia epäolennaisia ominaismuotoja ei esiinny. Kun verrataan molemmilla ohjelmilla laskettuja varsinaisia ominaistaajuuksia, havaitaan, että etenkin matalat taajuudet vastaavat toisiaan hyvin. Havaintojen perusteella ohjelmien antamia tuloksia voidaankin pitää yhtenevinä ja laskentaan tai ohjelmien toimintaan liittyviä virheitä epätodennäköisinä.

**Taulukko 8** Laskentamallien 1-4 vasteiden amplitudit tutkittavassa pisteessä.  
 Analyysityyppi FRF on taajuusvastefunktio- ja TH aikahistoria-analyysi.

Malli nro	Herätetaajuus $f$ Hz	Amplitudit						Analyysi
		$u_x$ mm	$u_y$ mm	$v_x$ mm/s	$v_y$ mm/s	$a_x$ mm/s <sup>2</sup>	$a_y$ mm/s <sup>2</sup>	
1a	2,50	0,061	0,059	0,97	0,93	15,2	14,6	FRF
	max (x): 0,35	17,943						
	0,63			70,26		279,6		
	max (y): 0,16		218,179		225,04		232,1	
1b	2,50	0,061	0,059	0,95	0,92	15,0	14,5	TH
	max (x):							
	max (y):							
1c	2,50	0,066	0,064	1,04	1,00	16,3	15,7	ANSYS
	max (x): 0,66	18,148		74,69		307,4		
	max (y): 0,17		195,035		208,33		222,5	
2	2,50	0,041	0,040	0,64	0,62	10,0	9,8	FRF
	max (x): 0,42	34,270		91,23		242,9		
	max (y): 0,16		229,254		235,98		242,9	
3a	2,50	0,097	0,072	1,52	1,14	23,9	17,8	FRF
	max (x): 1,56	3,509		34,46		338,4		
	max (y): 1,03		8,196		53,15		344,7	
3b	2,50	0,319	0,095	5,01	1,49	78,7	23,4	FRF
	max (x): 2,32	1,125		16,37		238,3		
	max (y): 1,51		4,053		38,37		363,3	
3c	2,50	0,113	0,082	1,78	1,28	27,9	20,1	FRF
	max (x): 1,72	3,088		33,40		361,4		
	max (y): 1,29		5,507		44,74		363,5	
3d	2,50	0,073	0,065	1,14	1,02	18,0	16,0	FRF
	max (x): 1,09	7,630		52,09		355,6		
	max (y): 0,77		14,289		69,06		333,7	
4	2,50	0,065	0,061	1,02	0,95	16,0	15,0	FRF
	max (x): 3,15	0,604		11,95		236,6		
	max (y): 3,20		0,592		11,90		239,3	

Laskentamallien 1a ja 2 avulla on tutkittu nesteen mallintamistavan vaikutusta laskennan tuloksiin. Liitteen B perusteella havaitaan, että mallin 1 taajuusvastefunktion kuvaajasta erottuu kaksi selvää huippua mutta mallin 2 kuvaajassa huippuja on vain yksi. Li-

säksi kun neste mallinnetaan ekvivalentin mekaanisen mallin sijaan vain yhden pistemassan mallilla, matalia ominaistajuuksia on vähemmän ja maksimivaste herätetaajuuden 2,5 Hz kohdalla pienenee. On kuitenkin huomattava, että mallissa 2 piste, johon herätevoima vaikuttaa ja josta vasteen arvo määritetään, sijaitsee alempana kuin mallissa 1, mikä voi myös osittain selittää tulosten eroja. Toisaalta tutkittavalla taajuusalueella havaittavat maksimiampplitudit ovat suurempia kuin mallin 1 tapauksessa, joten nesteen heilahtelun huomioiminen laskennassa voi tämän kannalta olla hyödyllistä. On kuitenkin tiedostettava, että ekvivalentin mekaanisen mallin vaikutus laskelmien tuloksiin ja vaikutusten voimakkuus riippuvat muun muassa rakenteen ominaisuuksista sekä säiliön mittasuhteista.

Kaavan (57) mukaan neste voidaan mallintaa ekvivalentin mekaanisen mallin avulla vain, kun konvektiivisen komponentin jaksonaika on vähintään kolme kertaa suurempi kuin säiliön ja tukirakenteen alinta ominaistajuuksia vastaava jaksonaika. Taulukon 4 perusteella konvektiivisen komponentin jaksonaika on 2,29 s, joten systeemin pisimmän jaksonajan tulisi olla pienempi kuin 0,76 s ja alimman ominaistajuuden siten suurempi kuin 1,31 Hz. Malli 2 ei toteuta tätä vaatimusta, koska alin ominaistajuus on vain 0,164 Hz. Näin ollen nestettä ei saisi tämän rakenteen tapauksessa mallintaa dynaamista tarkastelua varten ekvivalentilla mekaanisella mallilla. Tässä työssä jaksonaikavaatimusta ei kuitenkaan toistaiseksi huomioida, vaan laskelmissa käytetään ekvivalenttia mekaanista mallia alimman ominaistajuuden arvosta riippumatta.

Kun verrataan rakenteen 1 ja rakenteiden 3a-d ominaistajuuksia, havaitaan, että vinositein jäykistettyjen rakenteiden ominaistajuudet ovat korkeampia kuin jäykistämättömän. Vinositeet aiheuttavat myös uusia melko matalia ominaistajuuksia, jotka ovat käytännössä siteiden omia resonanssitajuuksia. Taulukon 8 perusteella siteiden lisääminen pienentää systeemin maksimiampplitudeja kiihtyvyyttä lukuun ottamatta. Herätetaajuuden 2,5 Hz kohdalla värähtelytaso kuitenkin kasvaa, koska jäykempien rakenteiden alimmat merkittävät ominaistajuudet ovat lähempänä kyseistä taajuutta ja siten myös resonanssitilaa. Tätä havainnollistavat hyvin liitteen B kuvaajat. Näin ollen rakenteen jäykistäminen voi vaikuttaa negatiivisesti tilanteeseen, jossa laite toimii sen tavanomaisella pyörimistajuuksella. Toisaalta rakenteelle ei voida sallia hyvin suuria siirtymiä muillakaan mahdollisilla, esimerkiksi laitteen käynnistysvaiheen, käyntitajuuksilla, minkä takia siteiden lisääminen on todennäköisesti välttämätöntä.

Taulukossa 8 jäykistettyjen rakenteiden 3a-d suurimmat amplitudit on kirjoitettu oranssilla ja pienimmät vihreällä värillä. Taulukon mukaan suurimmat amplitudit taajuudella 2,5 Hz tuottaa X-siteillä jäykistetty rakenne. Tämä johtuu käytännössä siitä, että osa systeemin merkittävistä ominaistajuuksista, joissa suuri osa massasta osallistuu värähtelyyn, on lähellä kyseistä herätetaajuutta. Matalammilla taajuuksilla esiintyvät maksimi siirtymät ja -nopeudet ovat puolestaan pienempiä kuin muiden sidetyyppien tapauksessa. Vähiten rakenteen jäykkyyttä kasvattaa vaihtoehto 3d, eli epätäydelliset ansassiteet. Kyseisen rakenteen merkittävät ominaistajuudet jäävät melko kauaksi taajuudesta

2,5 Hz ja vasteiden arvot ovatkin vain hieman suurempia kuin mallissa 1. Toisaalta siirtymän ja nopeuden maksimiampplitudit ovat huomattavasti pienempiä kuin ensimmäisen rakenteen tapauksessa mutta suurempia kuin muissa vinositein jäykistetyissä malleissa. Tutkittujen vinosidetyyppien 3a ja 3c eli diagonaali- ja kaksinkertaisten X-siteiden tulokset sijoittuvat edellä esiteltyjen tapausten välille. On kuitenkin huomioitava, että jos siteiden profiilit olisivat kaikissa ristikkotyypeissä samoja, olisi kaksi päällekkäin olevaa X-ristikkoa tutkituista sidevaihtoehdoista jäykin yksinkertaisen X-ristikon sijaan.

Laskentamalli 4 kuvaa perinteiseen ominaistajuusvaatimukseen perustuvaa rakennetta. Systeemin alin ominaistajuus on 3,15 Hz eli korkeampi kuin esitetty vaatimus 3,13 Hz. Taulukosta 8 havaitaan, että mallin 4 värähtelyn amplitudit taajuudella 2,5 Hz ovat samaa suuruusluokkaa ensimmäisen rakenteen kanssa. Amplitudi huippuarvot puolestaan esiintyvät vasta 2,5 Hz:ä korkeammilla herätetaajuuksilla, mikä on selvästi nähtävissä taajuusvastefunktion kuvaajasta liitteen B kuvassa 47. Jotta värähtelytasojen lisäksi voitaisiin vertailla rakenteiden taloudellisuutta, tarkastellaan vielä tutkittujen systeemien massoja taulukon 9 avulla. Vaikka massojen perusteella voidaankin arvioida rakenteiden kannattavuutta, todellisuudessa myös esimerkiksi liitosten määrä ja tyyppi vaikuttavat kustannuksiin.

***Taulukko 9** Laskentamallien 1-4 kokonaismassat.*

<b>Rakenne nro</b>	<b>Massa (kg)</b>	<b>Suhde 1. massa = 100</b>
<b>1</b>	103374	100,0
<b>2</b>	108502	105,0
<b>3a</b>	100174	96,9
<b>3b</b>	101520	98,2
<b>3c</b>	99777	96,5
<b>3d</b>	99777	96,5
<b>4</b>	118493	114,6

Taulukon 9 mukaan mallin 1 kokonaismassa on pienempi kuin mallin 2, vaikka itse tukirakenne on molemmissa tapauksissa sama. Massojen ero johtuu ekvivalentin mekaanisen mallin epätarkkuudesta, koska mallissa ei ole huomioitu nesteen korkeampia heilahtelutaajuuksia. Tämän takia impulsiivisen ja konvektiivisen pistemassan summa on nesteen todellista kokonaismassaa pienempi. Kaikki vinositein jäykistetyt rakenteet 3a-d ovat puolestaan ensimmäistä mallia kevyempiä, mikä johtuu pienemmästä pilariprofiilista. Rakenteista kevyimmät on jäykistetty joko kaksinkertaisilla X-siteillä tai epäkeskisillä ansasjäykisteillä. On kuitenkin huomioitava, että vinositein jäykistetyt rakenteet ja niiden massat eivät ole täysin optimoituja, koska kaikissa jäykistetyissä tilanteissa on käytetty samaa pilariprofiilia. Kuten on odotettavissa, ominaistajuusvaatimuksen täyttävä rakenne on tutkituista tapauksista painavin. Todellisuudessa mallin 4

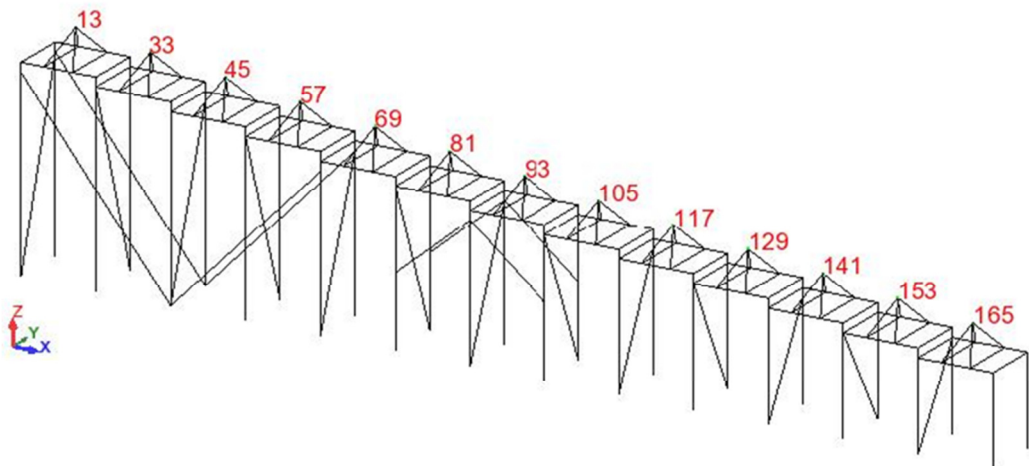
massa ei kuitenkaan ole niin suuri malleihin 1 ja 3 verrattuna kuin taulukon 9 perusteella vaikuttaa, vaan parempi vertailukohta olisi samalla nesteen mallinnustavalla tutkittu malli 2. Tulosten perusteella on kuitenkin todennäköistä, että harmoniseen analyysiin perustuva mitoitusmenetelmä johtaa ominaistaajuusvaatimukseen verrattuna huomattavasti taloudellisempiin rakenteisiin.

### 6.3 13 kennon jalusta: laskentamallit ja analyysityypit

Aliluvussa 5.1 on esitelty useasta kennosta ja niiden tukirakenteesta koostuva rakennesysteemi, jota tutkitaan seuraavaksi Robotin avulla. Systeemi mallinnetaan vastaavasti kuin yksittäinen jalustarakenne ja myös laskentaparametrit ovat aiemmin esitellyn mukaisia. Rakenne mitoitetaan ensin staattisten kuormien perusteella käyttäen samoja periaatteita kuin aliluvussa 6.1, jonka jälkeen rakennetta optimoidaan vielä dynaamisen analyysin avulla. Lopullisille systeemeille määritetään ominaistaajuudet, vasteiden maksimiampplitudit sekä amplitudit herätetaajuudella 2,5 Hz. Tutkittavat laskentamallit ja -tapaukset on esitetty taulukossa 10 sekä rakenteiden kuvat liitteessä D. Lisäksi kuvaan 33 on merkitty ne solmupisteet, joissa impulsiiviset pistemassat sijaitsevat ja joiden kohdalta vasteiden arvot siten määritetään. Lopulta ratkaistuja vasteiden amplitudeja verrataan taulukon 6 raja-arvoihin, jotta saadaan selville, täyttävätkö tutkittavat rakenteet kyseiset värähtelytasovaatimukset.

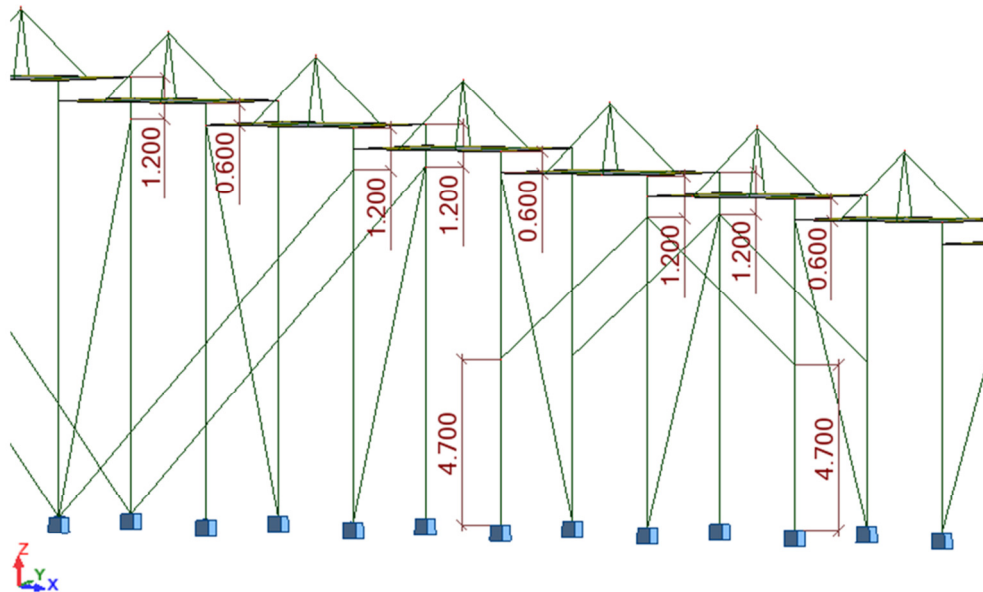
*Taulukko 10 Tutkittavat laskentamallit 5-7.*

Nro	Tukirakenteen mitoitus	Nesteen mallinnus	Analyysityyppi
5	staattinen: vinojäykisteet	ekvivalentti mekaaninen malli	FRF (Robot) TH (Robot)
a) b)			
6	staattinen: vinojäykisteet	pistemassa (keskipisteessä)	FRF
7	ominaistaajuusvaatimus	pistemassa (keskipisteessä)	FRF



*Kuva 33 Impulsiivisten pistemassojen solmujen numerot.*

Laskentamallien 3a-d avulla on aiemmin vertailtu eri vinosidetyyppien vaikutusta rakenteen dynaamiseen käyttäytymiseen. Saatujen tulosten mukaan epätäydelliset diagonaali-ansajäkisteet näyttävät soveltuvan hyvin tilanteeseen, jossa rakenne mitoitetaan harmonisen analyysin perusteella. Aikaisemmin on todettu, että kyseinen jäykistetyyppi estää suuret heilahtelut matalilla herätetaajuuksilla mutta ei jäykistä rakennetta liikaa. Systeemin x- ja y-suuntaiset merkittävät ominaistajuuDET jäävät siis selvästi pienemmiksi kuin 2,5 Hz ja värähtelytaso pysyy tällä herätetaajuudella kohtuullisena. Ansassiteiden jäykistysominaisuudet ovat siten tarkoituksenmukaisia ja lisäksi rakenteet ovat taloudellisia. Näistä syistä epätäydelliset ansassiteet valitaan myös suuremman jalustarakenteen jäykistysratkaisuksi. Jalustan leveys- eli y-suuntaisten jäykisteiden epäkeskisyyks pilarin yläreunasta on joko 0,6 tai 1,2 metriä siten, että kaksi peräkkäistä diagonaalisisidettä ovat aina yhtä pitkiä. Myös rakenteen pituussuuntaiset jäykisteet liitetään yläpäistään samalle korkeudelle y-suuntaisten jäykisteiden kanssa. Vinositeiden sijoittelua laskentamalleissa 5 ja 6 on havainnollistettu kuvassa 34.



**Kuva 34** Vinositeiden sijoittelu laskentamalleissa 5 ja 6.

Epäkeskisillä ansassiteillä jäykistetty rakennemalli 5 mitoitetaan ensin staattisille kuormille, jonka jälkeen systeemiä tutkitaan taajuusvastefunktioanalyysin avulla. Rakenne pyritään jäykistämään ja pilareiden profiilit valitsemaan siten, että sen värähtelytaso kaikkien kennojen kohdalla herätetaajuudella 2,5 Hz on niin alhainen kuin mahdollista. Rakenteen tulee olla myös mahdollisimman taloudellinen eli käytännössä kevyt. Lopullinen rakenne on esitetty liitteen D kuvassa 48. Rakenteen yläosan eli ritilän alla olevien palkkien profiilit ovat samoja kuin kuvan 32 tapauksessa. Liitteen E kuvissa 51 ja 52 on esitetty laskentamallin 5a mukaiset siirtymän taajuusvastefunktioiden kuvaajat x- ja y-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.



Laskentamallissa 5b edellä esiteltyä rakennetta tutkitaan aikahistoria-analyysillä. Liitteen E kuva 53 havainnollistaa ylimmän kennon eli solmun 13 siirtymävastetta x- ja y-suunnassa, kun pyörivä herätevoima kohdistuu rakenteeseen 300 sekunnin ajan. Kuvaajien lisäksi solmupisteiden vasteiden arvot saadaan Robotissa esitettyä taulukoituina. Taulukoiden avulla on tutkittu kaikkien impulsiivisten pistemassojen värähtelyä ja havaittu, että transientti värähtely on täysin vaimentunut pois noin 120 sekunnin kuluttua värähtelyn alkamisesta ja jo 75 sekunnin kohdalla siirtymän amplitudi toistuu joka jaksolla lähes samansuuruisena. Värähtelyn amplitudi näyttää siis vakiintuvan suuren rakenteen tapauksessa huomattavasti pientä rakennetta nopeammin.

Laskentamallissa 6 tutkittava rakenne on muilta osin sama kuin edellisessä tapauksessa, mutta kenno sisältöineen on mallinnettu vain yhtenä pistemassana, joka on kiinnitetty tukirakenteeseen jäykästi. Rakennemalli on siis säiliön osalta sama kuin aikaisemmin käsitellyssä pienemmässä laskentamallissa 2. Taajuusvastefunktioiden kuvaajat x- ja y-suunnassa on kuvattu liitteen E kuvissa 54 ja 55. Systeemin vasteet on määritetty mallin ainoan pistemassan kohdalta eli nestepinnan korkeuden puolivälistä, johon myös dynaaminen herätevoima kohdistuu.

Viimeisen laskentamallin 7 tarkoituksena on mitoittaa kuvan 25 mukainen rakenne 25 %:n ominaistajuusvaatimuksen perusteella. Käytännössä rakenne tulee siis jäykistää ja rakenneosien profiilit valita tarkoituksenmukaisella tavalla. Laskentamalli 7 vastaa aiemmin tutkittua pienempää mallia 4, eli rakenteen alimman ominaistajuuden on oltava vähintään 3,13 Hz ja nesteen heilahtelua ei huomioida laskennassa. Ominaisaajuusvaatimuksen perusteella mitoitettu rakenne on esitetty liitteen D kuvassa 50, jonka lisäksi ritilöiden alla olevat tasot ovat liitteen A kuvan 38 mukaisia. Rakenne värähtelee voimakkaimmin vasta 2,5 Hz:ä korkeammilla herätetaajuuksilla, minkä takia taajuusvastefunktioanalyysin taajuusalueeksi valitaan poikkeuksellisesti 0-5,0 Hz. Analyysin tuloksena saadut siirtymän amplitudin kuvaajat x- ja y-suunnassa on esitetty liitteen E kuvissa 56 ja 57.

Liitteen F taulukoihin on koottu laskentamallien 5-7 siirtymän, nopeuden ja kiihtyvyyden amplitudit herätetaajuudella 2,5 Hz sekä amplitudien maksimiarvot tutkittavalla taajuusalueella kaikkien kennojen kohdalla. Mallin 5b tapauksessa taulukoissa on ilmoitettu ainoastaan pysyvän värähtelyn maksimivasteet taajuudella 2,5 Hz. Liitteessä F mallit 5a, 5b, 6 ja 7 on numeroitu taulukon 10 mukaisesti. Lisäksi liitteessä G on esitetty rakenteiden 5-7 ominaistajuudet 100 ominaisarvoon asti. Ekvivalentin mekaanisen mallin konvektiivinen pistemassa aiheuttaa, kuten aliluvussa 6.2 on todettu, erittäin alhaisia ominaistajuuksia, joilla ei käytännön tilanteessa ole merkitystä. Nämä matalat ominaistajuudet jätetään jälleen huomiotta ominaistajuuksien numeroinnissa, ja varsinaiset alimmat ominaistajuudet asetetaan alkamaan samalta riviltä.

## 6.4 13 kennon jalusta: päätelmät

Minkä tahansa kennon kohdalla esiintyvät suurimmat vasteiden amplitudit laskentamallien 5-7 tapauksessa on poimittu liitteestä F taulukkoon 11. Taulukon asettelu on vastaava kuin taulukossa 8, eli jokaista mallia vastaava ensimmäinen rivi ilmoittaa värähtelytason herätetaajuuden ollessa 2,5 Hz ja kaksi tai kolme seuraavaa riviä x- ja y-suuntaiset maksimiampplitudit sekä niitä vastaavat herätetaajuudet. Eri kategorioiden pienimmät arvot on jälleen merkitty punaisella ja suurimmat sinisellä taustavärillä. Eri laskentamallien tuloksia vertaillaan seuraavaksi tämän taulukon sekä liitteiden E ja G avulla.

**Taulukko 11** Laskentamallien 5-7 vasteiden amplitudit eniten värähtelevän kennon kohdalla. Analyysityyppi FRF on taajuusvastefunktio- ja TH aikahistoria-analyysi.

Malli nro	Herätetaajuus $f$ Hz	Amplitudit						Analyysi
		$u_x$ mm	$u_y$ mm	$v_x$ mm/s	$v_y$ mm/s	$a_x$ mm/s <sup>2</sup>	$a_y$ mm/s <sup>2</sup>	
5a	2,50	0,077	0,079	1,20	1,25	18,9	19,6	FRF
	max (x) 1,02	9,177		58,89		377,9		
	0,84		15,862		83,84			
	max (y) 1,00						485,6	
5b	2,50	0,082	0,079	1,29	1,25	20,3	19,6	TH
	max (x)							
	max (y)							
6	2,50	0,054	0,047	0,85	0,74	13,4	11,6	FRF
	max (x) 0,81	10,212		51,66		261,4		
	0,64		19,631		79,38			
	max (y) 0,76						335,3	
7	2,50	0,064	0,076	1,00	1,20	15,7	18,8	FRF
	max (x) 3,29	0,713		14,76		305,4		
	3,13		0,764		15,04			
	max (y) 3,23						302,1	

Kun tutkitaan taulukkoa 11, havaitaan, että mallin 5 amplitudit taajuusvastefunktio- tai aikahistoria-analyysillä laskettuna ovat samaa suuruusluokkaa. X-suunnassa aikahistoria-analyysi tuottaa kuitenkin hieman suuremmat arvot. Tästä huolimatta näyttää todennäköiseltä, että taajuusvastefunktionalyysin tulokset ovat riittävän tarkkoja aikahistoria-analyysiin verrattuna. Herätevoima voidaan siis mallintaa ja sen vaikutukset analysoida erikseen x- ja y-suunnassa, eikä voiman pyörimistä tarvitse huomioida. Tästä havainnosta on hyötyä etenkin suurikokoisten rakenteiden tapauksessa, jossa aikahistoria-

analyysin laskenta-aika on pitkä ja jonkin toisen analyysityypin käyttäminen on järkevää.

Seuraavaksi vertaillaan mallien 5 ja 6 ominaistajuuksia liitteen G perusteella. Koska molemmissa tapauksissa tutkittava tukirakenne on täysin sama, ominaistajuuksissa esiintyvien erojen on aiheuduttava säiliön sisällön mallinnustavasta. On selvää, että mallissa 6, jossa kennossa oleva neste on mallinnettu vain yhtenä pistemassana, ei synny hyvin alhaisia ominaistajuuksia, jotka aiheutuvat konvektiivisen pistemassan kiertymisestä pysty akselin ympäri. Mallin 5 tuloksissa esiintyy myös huomattava määrä muita, melko matalia ominaistajuuksia, joita ei mallin 6 tapauksessa havaita. Näiden ominaistajuuksien on siten aiheuduttava ekvivalentista mekaanisesta mallista ja etenkin konvektiivisiin pistemassoihin liittyvästä alhaisesta jäykkyydestä.

Mallien 5 ja 6 vasteiden amplitudeja tarkastellaan taulukon 11 perusteella. Taulukon mukaan mallin 6 värähtelytaso herätetaajuuden 2,5 Hz kohdalla on pienempi kuin mallin 5 tapauksessa. Siirtymän maksimiamplitudit tutkittavalla taajuusalueella ovat puolestaan suurempia silloin, kun ekvivalenttia mekaanista mallia ei hyödynnetä. Vasteiden arvoja tutkittaessa on jälleen huomioitava, että mallissa 6 herätevoima kohdistuu jokaisen kennon kohdalla solmuun, joka sijaitsee alempana kuin mallissa 5. Myös vasteiden määrittyskorkeudet ovat siten erilaiset. Näin ollen tulokset eivät ole täysin vertailukelpoisia mallien välillä. Vaikuttaa kuitenkin siltä, että nesteen heilahtelun huomioiminen ei tuo tutkitussa tilanteessa suurta etua. On myös huomattava, että jos rakenteen ominaistajuudet pyritään pitämään matalina eli huomattavasti pienempinä kuin herätetaajuus 2,5 Hz, kaavan (57) mukainen jaksonaikavaatimus ei tämän työn tilanteessa todennäköisesti toteudu eikä kennossa olevaa nestettä saisi mallintaa ekvivalentilla mekaanisella mallilla. Tutkittavan tilanteen jaksonaikavaatimusta on käsitelty tarkemmin aliluvussa 6.2.

Tähän mennessä tutkituissa malleissa 5 ja 6 tukirakenne on mitoitettu staattisten kuormien perusteella ja jäykistetty lisäksi siten, että systeemin värähtelytaso on mahdollisimman alhainen. Laskentamallissa 7 suunnittelun lähtökohtana on staattisen mitoituksen sijaan rakenteen ominaistajuusvaatimus, minkä takia rakennetta on jäykistettävä huomattavasti enemmän. Liitteen G mukaan kyseisen rakenteen alin ominaistajuus on 3,13 Hz, eli se täyttää niukasti rakenteelle asetetun ominaistajuusvaatimuksen. Taulukon 11 mukaan mallin 7 värähtelyn amplitudit taajuudella 2,5 Hz ovat hieman pienemmät kuin mallissa 5 mutta suuremmat kuin mallissa 6. Amplitudiin maksimi arvot ovat sen sijaan paljon matalampia kuin muissa tutkituissa tapauksissa, ja ne esiintyvät vasta 2,5 Hz:ä korkeammilla herätetaajuuksilla. Tämä on selvästi nähtävissä liitteen E kuvista 56 ja 57.

Dynaamisen käyttäytymisen lisäksi on aiheellista vertailla rakenteiden taloudellisuutta, jota voidaan arvioida rakenteen massan perusteella. Tästä syystä tutkittavien systeemien kokonaismassat on koottu taulukkoon 12. Taulukon mukaan mallin 6 massa on suurem-

pi kuin mallin 5, vaikka tukirakenne on molemmissa tapauksissa sama. Kuten pienemmän mallin kohdalla aliluvussa 6.2 on todettu, tämä massojen ero aiheutuu kennon sisällön erilaisesta mallinnusmenettelystä ja erityisesti ekvivalentin mekaanisen mallin epätarkkuudesta. Seuraavaksi verrataan ominaistaajuusvaatimuksen perusteella mitoitettua rakennetta tilanteeseen, jossa sekä rakenteen massa että sen värähtelytaso on pyritty pitämään mahdollisimman pieninä. Rakenteiden massoja verrataan mallien 6 ja 7 avulla, koska niissä on käytetty keskenään samaa nesteen mallinnustapaa. Mallin 7 tapauksessa systeemin massan havaitaan olevan huomattavasti suurempi kuin mallissa 6. Tämä on odotettu tulos, sillä ominaistaajuusvaatimukseen perustuvan rakenteen on oltava erittäin jäykkä, mikä toteutetaan käytännössä jäykisteitä lisäämällä ja rakenneosien profiileita kasvattamalla. Tämän tarkastelun perusteella värähtelyn rajoittamiseen perustuvaa mitoitusastapaa voidaan siten pitää huomattavasti perinteistä menetelmää taloudellisempänä.

*Taulukko 12 Laskentamallien 5-7 kokonaismassat.*

Rakenne nro	Massa (kg)	Suhde 5. massa = 100
5	1271565	100,0
6	1338223	105,2
7	1432742	112,7

Aliluvun 5.4 taulukossa 6 on esitetty vasteiden raja-arvot, joita systeemi ei saisi värähdellensä ylittää. Seuraavaksi näihin arvoihin verrataan laskentamallien 5-7 vasteiden amplitudeja. Tutkitaan ensin tilannetta herätetaajuudella 2,5 Hz, jolloin kaikki mallit 5-7 alittavat selvästi nopeudelle ja kiihtyvyydelle asetetut raja-arvot 3 mm/s ja 100 mm/s<sup>2</sup>. Siirtymävasteen raja-arvon 0,052 mm sen sijaan alittaa ainoastaan laskentamallin 6 y-suuntainen siirtymä. Näin ollen mikään tutkituista rakenteista ei siis läpäisisi värähtelyn rajoittamiseen perustuvaa mitoitusvaatimusta. Erityisesti on huomioitava, että myöskään rakenne 7, joka perustuu tällä hetkellä käytössä olevaan ominaistaajuusvaatimukseen, ei alita taulukon 6 siirtymävasteen raja-arvoja.

Tulosten perusteella vaikuttaa siltä, että joko laskennassa käytetty herätevoima on liian suuri tai asetetut raja-arvot liian tiukkoja. Tästä johtuen tarkastellaan vielä luvussa 4 esitettyä taulukkoa 1. Jos vasteiden raja-arvoina käytettäisiin A-vyöhykkeen sijaan vyöhykkeen B arvoja, siirtymän amplitudi saisi olla enintään 0,100 mm ja kaikki tutkittavat rakenteet 5-7 alittaisivat värähtelyn raja-arvot. Kuten luvussa 4 on todettu, vyöhykkeen B mukainen värähtelytaso ei vaaranna laitteen toimintaa, joten sitä vastaavien värähtelyrajojen käyttö on mahdollista. On kuitenkin huomioitava, että mitä suuremmat vasteet suunnitteluvaiheessa sallitaan, sitä nopeammin haitallinen värähtelytaso todennäköisesti ylittyy ja laitetta on korjattava.

Tässä työssä on keskitytty jatkuvan värähtelyn tutkimiseen eikä satunnaiselle tai hetkelliselle värähtelytasolle ole asetettu raja-arvoja. Niinpä vasteita, jotka esiintyvät 2,5 Hz:ä

pienemmillä herätetaajuuksilla esimerkiksi laitteen käynnistysvaiheessa, ei ole rajoitettu. On kuitenkin mahdollista, että tällainen satunnainen värähtely aiheuttaa ongelmia laitteen tai rakenteen toiminnalle. Vertaillaan seuraavaksi jäykän ja joustavan rakenteen maksimivärähtelytasoja. Liitteen E kuvien 56 ja 57 perusteella havaitaan, että hyvin jäykkä rakenne värähtelee voimakkaimmin vasta laitteen käyntitaajuuden 2,5 Hz yläpuolella ja silloinkin siirtymät ovat hyvin pieniä. Kuvien 54 ja 55 mukaan vähemmän jäykän rakenteen amplitudien huippuarvot esiintyvät puolestaan matalammilla herätetaajuuksilla ja myös siirtymät ovat selvästi suurempia. Jos satunnaisen värähtelyn huippuarvoa rajoitetaan rakennetta jäykistämällä, rakenteen merkittävät ominaistaajuudet voivat siirtyä lähelle herätetaajuutta 2,5 Hz, jolloin jatkuvan värähtelyn amplitudit kasvavat. Tämä on havaittu aiemmin yksittäisen jalustarakenteen laskentamallissa 3b. Jotta laitteen toiminta sekä jatkuvan että satunnaisen värähtelyn aikana voidaan taata, on mahdollista, että tukirakenteen oltava erittäin jäykkä. Tällöin systeemin ominaistaajuudet siirtyvät selvästi jatkuvan värähtelyn taajuuden yläpuolelle, kuten laskentamallin 7 tapauksessa. On kuitenkin huomioitava, että värähtelyä voidaan kontrolloida jäykistämisen sijaan myös muilla menetelmillä, joita on esitelty tarkemmin aliluvussa 4.3.

## 7 YHTEENVETO JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Tässä työssä on tutkittu sekoittimella varustettujen lietekennojen teräksistä tukirakennetta, kun systeemiin kohdistuu lietteen sekoitusprosessista aiheutuva harmoninen herätevoima. Laitteen käyntitaajuus, joka on myös harmonisen herätteen taajuus, on 2,5 Hz. Lisäksi laite toimii tätä pienemmillä taajuuksilla satunnaisesti. Perinteisesti tukirakenteen suunnitteluvaatimuksena on ollut, että systeemin alin ominaistajuus on vähintään 25 % herätetaajuutta suurempi. Työn päätavoitteena on selvittää, voiko sekoittimilla varustettujen kennojen tukirakenteen suunnittelu perustua ominaistajuusvaatimuksen sijaan värähtelytason rajoittamiseen ja onko ehdotettu menetelmä taloudellisesti kannattava. Lisäksi on tutkittu lietteen mahdollisia mallintamistapoja ja tukirakenteen jäykistysratkaisuita sekä vertailtu eri laskentaohjelmien ja -menetelmien tuloksia.

Taulukkoon 13 on koottu laskentamallien 6 ja 7 vasteiden amplitudit ja systeemien kokonaismassat, joista on vähennetty kennon ja nesteen osuus, sekä vasteiden raja-arvot. Laskentamalli 6 edustaa tilannetta, jossa systeemin värähtelytaso herätetaajuudella 2,5 Hz on pyritty minimoimaan, ja laskentamallissa 7 rakenne on mitoitettu 25 %:n ominaistajuusvaatimuksen perusteella. Taulukosta havaitaan, että sekä systeemin kokonaismassa että kaikkien vasteiden amplitudit herätetaajuudella 2,5 Hz ovat pienempiä mallin 6 tapauksessa. Näin ollen vaikuttaa siltä, että vasteiden minimointiin perustuva mitoitus tapa on kannattava, sillä se johtaa sekä kevyempiin eli käytännössä taloudellisempiin rakenteisiin että pienempään värähtelytason. Tutkittavalla taajuusalueella 0-2,5 Hz esiintyvä mallin 6 maksimivärähtelytaso on sen sijaan huomattavasti suurempi kuin mallissa 7, jonka tapauksessa systeemi värähtelee voimakkaimmin vasta korkeammilla herätetaajuuksilla. Satunnaiselle värähtelylle ei ole tässä työssä asetettu raja-arvoja, mutta tulevaisuudessa hetkelliselle värähtelylle sallittava maksimitaso tulee selvittää. Vasta tämän jälkeen tiedetään täyttääkö malli 6 kaikki asetetut vaatimukset ja voidaanko sen mukaista rakennetta soveltaa myös käytännön kohteissa.

Kun laskentamallin 6 amplitudeja verrataan jatkuvan värähtelyn raja-arvoihin, havaitaan, että rakenne toteuttaa vaatimukset selvästi nopeuden ja kiihtyvyyden osalta. Siirtymävasteen raja-arvo puolestaan ylittyy x-suunnassa niukasti. Myöskään laskentamallin 7 mukainen rakenne, joka täyttää perinteisen mitoitusvaatimuksen, ei toteuta siirtymän raja-arvoja. Näin ollen vaikuttaa siltä, että joko sallittu värähtelytaso on liian alhainen tai laskennassa käytetyn herätevoiman arvo liian suuri. On myös huomattava, että jos herätteen todellista voimakkuutta ei tiedetä, vasteiden amplitudien lukuarvot ovat käytännössä merkityksettömiä, sillä ne ovat suoraan verrannollisia herätevoiman arvoon. Tulokset ovat kuitenkin keskenään vertailukelpoisia, joten eri rakenteiden käytäytymistä ja kannattavuutta voidaan arvioida. Lisäksi tiedetään, että tässä työssä vas-

teiden amplitudit on määritetty likimain säiliön keskipisteen korkeudelta. Todellisuudessa siirtymää ja nopeutta tulisi kuitenkin mitata lähes sekoittimen yläreunan kohdalta ja kiihtyvyyttä hoitotasolta, jotta vasteiden raja-arvot pätisivät.

**Taulukko 13** Tukirakenteen vasteiden amplitudit ja massat eri mitoitustapauksissa sekä vasteiden raja-arvot.

	$f=2,5 \text{ Hz}$			$f=0...2,5 \text{ Hz}$	
	6	7	raja-arvot	6	7
$u_x$ (mm)	0,054	0,064	0,052	10,212	0,064
$u_y$ (mm)	0,047	0,076	0,052	19,631	0,076
$v_x$ (mm/s)	0,85	1,00	3,0	51,66	1,00
$v_y$ (mm/s)	0,74	1,20	3,0	79,38	1,20
$a_x$ (mm/s <sup>2</sup> )	13,4	15,7	100	261,4	15,7
$a_y$ (mm/s <sup>2</sup> )	11,6	18,8	100	335,3	18,8
<b>erotus</b>					
<b>massa</b> (kg)	1246223	1340742	94519		
<b>suhde massaan 6</b> (%)	100,0	107,6	7,6		

Tässä työssä etenkin vasteiden rajoittamiseen perustuvaa mitoitusmenetelmää ja sitä kuvaavaa laskentamallia on yksinkertaistettu, mikä tulee huomioida, jos menetelmää hyödynnetään käytännön suunnittelukohteissa. Ensinnäkin oman painon ja harmonisen herätevoiman lisäksi systeemiin mahdollisesti kohdistuvia kuormituksia, kuten tuulenpainetta tai impulsiivisia voimia, ei ole tutkittu. Todellisissa suunnittelutilanteissa on kuitenkin huomioitava kaikki systeemiin kohdistuvat voimat ja niiden dynaamiset vaikutukset, mikäli sellaisia on. Esimerkiksi impulssiherätteet voivat aiheuttaa haitallista värähtelyä, sillä ne herättävät systeemin resonanssitajuuudet tietyn taajuusalueen sisällä, kuten on todettu aliluvussa 4.2. Tästä syystä tuleekin selvittää, voiko systeemiin kohdistua haitallisia impulssimaisia voimia esimerkiksi laitteen toiminnasta tai ulkoisista tekijöistä johtuen.

Herätevoimaan liittyen tulee myös huomioida, että sekoittimen käyntitaajuus käytön aikana ei välttämättä ole täsmälleen yhtä suuri kuin on ilmoitettu. Etenkin joustavan systeemin tapauksessa värähtelyvoimakkuus voikin olla huomattavasti määritettyä suurempi, jos harmonisen herätteen taajuus on oletettua matalampi. Lisäksi todetaan, että käytettyjen vasteiden raja-arvojen tarkoituksena on turvata ainoastaan laitteiden toimintavarmuus sekä henkilöstön turvallisuuden- ja mukavuudentunne. Näin ollen esimerkiksi rakenneosien väsymisen mahdollisuutta ja siitä johtuvia rajoituksia ei ole tutkittu. Rakenteet on myös mitoitettu ilman suunnittelujärjestelmän edellyttämää varmuustasoa eli esimerkiksi kuormia ei ole kerrottu eurokoodin mukaisilla osavarmuusluvuilla, vaik-

ka todellisissa suunnittelutilanteissa rakenteille on taattava riittävä varmuus eri rajatiloja vastaan.

Mitoitusmenetelmän lisäksi on tarkasteltu lietteen mallintamistavan vaikutusta dynaamisen laskennan tuloksiin. Erityisesti on tutkittu nesteen ekvivalenttia mekaanista mallia, jonka avulla säiliössä olevan nesteen tai lietteen pintakerroksen aaltoilun vaikutukset otetaan huomioon. Kun neste mallinnetaan käyttäen ekvivalenttia mekaanista mallia, säiliösystemin värähtelytason tulisi teoriassa olla pienempi verrattuna tilanteeseen, jossa nesteen oletetaan liikkuvan yhdessä säiliön kanssa. Tämän työn laskelmien ja etenkin laskentamallien 1a ja 2 sekä 5a ja 6 perusteella on havaittu, että maksimivärähtelytaso todella on pienempi silloin, kun lietteen pinnan heilahtelu huomioidaan. Herätaajuuden ollessa 2,5 Hz värähtely on puolestaan voimakkaampaa, vaikkakin erot eri mallinnustapojen välillä ovat pieniä.

Ekvivalentin mekaanisen mallin tapauksessa on huomioitava menetelmään liittyvä jaksonaikavaatimus. Jos tukirakenne suunnitellaan vasteiden raja-arvojen perusteella siten, että rakenne on mahdollisimman kevyt, alimpia ominaistajuuksia vastaavat jaksonajat ovat todennäköisesti pitkiä. Tällöin rakenteen värähtely vaikuttaa nesteen pinnan matalaajuuteen heilahteluun eivätkä ne ole toisistaan riippumattomia, minkä takia nesteen ekvivalenttia mekaanista mallia ei saa käyttää hyödyksi rakenteen mitoittamisessa. On joka tapauksessa epätodennäköistä, että lietteen heilahtelun huomioimisesta olisi tutkitavassa tilanteessa juurikaan hyötyä. Ekvivalentti mekaaninen malli monimutkaistaa laskentaa ja vaikeuttaa tulosten tulkintaa etenkin ominaistajuuksien osalta, minkä takia sen tuottamat haitat ovat todennäköisesti hyötyjä suuremmat. On kuitenkin huomioitava, että etenkin kennon mittasuhteet vaikuttavat siihen, kuinka suuri merkitys lietteen aaltoilulla on. Näin ollen jos tutkittava kenno on hyvin matala ja leveä, ekvivalentin mekaanisen mallin käyttäminen voi olla kannattavaa.

Lietteen mallintamiseen ja etenkin ekvivalentin mekaanisen mallin soveltamiseen liittyy myös joitakin epävarmuustekijöitä. Suurin haaste on, että lietteen todellisia ominaisuuksia ei tunneta. Siksi ei myöskään ole varmaa, käyttäytyykö liete nesteen tavoin ja voidaananko sitä siten kuvata ekvivalentilla mekaanisella mallilla. Oikea mallinnustapa ja esimerkiksi hitausmomentin arvo riippuvat muun muassa lietteen viskositeetista ja vaimennuskapasiteetista. Tässä työssä ekvivalenttiin mekaaniseen malliin ei myöskään ole lisätty kennon seinämien joustavuuden vaikutusta, joten määritetyt vasteiden arvot voivat olla todellisia pienemmät. Lisäksi on huomioitava, että missään tutkimuksessa laskentamallissa ei ole huomioitu komponenttien erilaisia vaimennuskapasiteetteja eikä varsinkaan lietteen todellista vaimennusta tiedetä. Tästä aiheutuva virhe on kuitenkin todennäköisesti hyvin pieni.

Edellä mainittujen aiheiden lisäksi työssä on tutkittu erityyppisiä ristikkojäykisteitä. Kun rakenne halutaan pitää mahdollisimman kevyenä ja jatkuvan värähtelyn vasteet pieninä, on rakenteesta järkevää suunnitella niin joustava, että sen alimmat ominaistaa-



juudet ovat pienempiä kuin herätteen taajuus. Rakennetta ei siten tule jäykistää liikaa, jotta resonanssitila tai sen läheisyys vältetään. Tutkittujen sidevaihtoehtojen perusteella on havaittu, että tällaisen rakenteen jäykisteiksi soveltuvat parhaiten epätäydelliset anssasiteet. Kyseisillä siteillä jäykistetyn rakenteen alimmat ominaistaajuudet jäävät huomattavasti jatkuvan herätteen taajuutta pienemmiksi, minkä lisäksi vasteiden amplitudit tämän taajuuden alapuolella ilmenevissä satunnaisissa resonanssitilanteissa ovat pienempiä kuin mastojäykistetyn rakenteen tapauksessa.

Tutkittaviin laskentamalleihin on tehty myös tukirakennetta koskevia yksinkertaistuksia, jotka vaikuttavat osaltaan analyysin tuloksiin. Ensinnäkin maan tai peruspilareiden mahdollista joustavuutta ei ole otettu huomioon, mikä aiheuttaa epävarmuutta sekä vasteiden että ominaistaajuuksien arvoihin. Kuten aliluvussa 3.5 on todettu, ominaistaajuudet ovat todellista korkeampia, jos pilareiden tuenta oletetaan täysin jäykäksi eikä tuen siirtymää tai kiertymää sallita. Toisaalta myöskään jalustarakenteen ylätasoon todellista jäykkyyttä ei ole tässä työssä tutkittu. On mahdollista, että ritilä ja kenno yhdessä jäykistävät rakennetta oletettua enemmän ja esimerkiksi tason vaakasuuntainen taipuma estyy. Tällä olisi vaikutusta sekä systeemin ominaistaajuuksiin että sen värähtelytasoon. Lisäksi on huomioitava, että myös liitosten jäykkyys vaikuttaa merkittävästi rakenteen dynaamisiin ominaisuuksiin ja värähtelyn voimakkuuteen. Tämän takia liitokset tulee suunnitella ja rakenne mallintaa siten, että dynaamisessa analyysissä käytettävä laskentamalli on mahdollisimman todenmukainen.

Laskentaohjelmien ja analyysimenetelmien käytettävyyttä sekä tulosten vastaavuutta on vertailtu eri laskentamallien avulla. Yksittäinen tukirakenne on mallinnettu ja analysoitu sekä Robotilla että Ansysella, ja tulosten on havaittu olevan samaa suuruusluokkaa. Näin ollen ohjelmien tai kyseisten laskentamallien toimintaan liittyvät virheet ovat epätodennäköisiä. Toisaalta myös Robotin taajuusvastefunktio- ja aikahistoria-analyysin tulokset vastaavat toisiaan hyvin, kuten on havaittu mallien 1a ja 1b sekä 5a ja 5b avulla. Suurin ero näiden analyysimenetelmien välillä on se, että taajuusvastefunktioanalyysi ei mahdollista herätevoimien mallintamista eri vaiheisiin, kuten pyörivän voiman tapauksessa on tarpeen. Tällä perusteella vaikuttaakin siltä, että herätevoiman pyörimisen vaikutus on pieni, joten harmoninen voima voidaan mallintaa ja sen vaikutuksia tarkastella erikseen x- ja y-suunnassa. Taajuusvastefunktioanalyysi soveltuu siten hyvin systeemin värähtelytason määrittämiseen tutkittavassa tilanteessa etenkin, koska menetelmän omaksumisen on havaittu olevan helppoa ja laskennan tehokasta.

Tässä työssä systeemin värähtelyä on tutkittu ainoastaan laskennallisesti elementtimenetelmään perustuvien ohjelmien avulla. Vaikka rakennetta on analysoitu kahdella eri ohjelmalla ja dynaamiset vasteet on määritetty myös eri analyysityyppejä käyttäen, ei systeemin todellista käyttäytymistä ja värähtelytasoa voida kuitenkaan tietää. Jotta käytettyjen laskentamallien tarkkuus saadaan varmistettua, vasteiden todellinen suuruusluokka tulee selvittää kokeellisesti. Käytännössä värähtelyn voimakkuutta voidaan mitata

olemassa olevista rakenteista kiihtyvyyssantureiden avulla. Kokeellisella moodianalyysillä on myös mahdollista tutkia rakenteen ominaisvärähtelyä.

Kuten edellä on käynyt ilmi, tämän työn ja etenkin laskennallisen tarkastelun ulkopuolelle on tietoisesti rajattu joitakin seikkoja. Ennen kuin työn tuloksia voidaan soveltaa käytännön suunnittelussa, on näitä aiheita kuitenkin tutkittava. Laajin lisätutkimuskohde on systeemiin kohdistuva herätevoima, jonka voimakkuutta voidaan arvioida esimerkiksi kokeellisesti. Voiman syntymekanismin syvällisempi tarkastelu ja arvon määrittäminen teoreettisesti edellyttävät, että laitteen, kennon ja lietteen ominaisuudet tunnetaan. Systeemin käyttäytymistä ja esimerkiksi syntyviä virtauskuvioita voidaan tutkia perusteellisesti yksityiskohtaisen FEM-mallin avulla. Tämä on kuitenkin kannattavaa ainoastaan tutkimusmielessä, jotta yksinkertaisemman suunnittelumenetelmän toimivuus saadaan varmistettua. Näin voitaisiin esimerkiksi selvittää, soveltuuko nesteen ekvivalentti mekaaninen malli kuvaamaan myös tutkittavan lietteen dynaamista käyttäytymistä. Herätevoiman lisäksi kennon osalta tulee tutkia seinämien mahdollista joustavuutta ja sen vaikutusta systeemin värähtelytasoon. Työn laskelmissa on myös oletettu, että kennossa olevan lietteen kokonaismassa on aina yhtä suuri. Todellisissa tilanteissa kennon täyttöaste ja lietteen tiheys voivat kuitenkin vaihdella, mikä vaikuttaa systeemin dynaamisiin ominaisuuksiin ja mahdollisesti herätevoiman arvoon.

Myös kennojen tukirakennetta ja sen mallintamistapaa on tutkittava enemmän, ennen kuin vasteiden rajoittamiseen perustuvaa mitoitusmenetelmää voidaan käyttää todellisissa mitoituslaitteissa. Lisätutkimusta vaativat etenkin pilareiden perustukset ja perustusliitokset sekä niiden joustavuus. Käytännössä joustava tuenta voidaan mallintaa esimerkiksi jousien avulla. Ensin on kuitenkin selvítettävä, mikä on sopiva jousivakio kullekin vapausasteelle eli kuinka paljon perustukset joustavat eri suunnissa. Perustusten joustavuuden lisäksi jatkossa on tutkittava, mikä on tukirakenteen ylätasoon todellinen jäykkyys ja onko tämän työn mukainen laskentamalli siltä osin riittävän tarkka. Käytännön suunnittelussa käytettävän rakennemallin tulee olla yksinkertainen mutta silti dynaamisilta ominaisuuksiltaan todenmukainen. Tutkimustarkoituksessa ritilän ja kennon jäykistävää vaikutusta olisi kuitenkin hyödyllistä tarkastella yksityiskohtaisen laskentamallin avulla. Lisäksi todetaan, että systeemin värähtelyvoimakkuuteen voidaan vaikuttaa myös muilla keinoin kuin rakenteen jäykkyyttä muuttamalla. Värähtelyn kontrollintimenetelmiä ei ole käsitelty tässä työssä laskennallisesti, mutta niitä on esitelty lyhyesti aliluvussa 4.3. Tulevaisuudessa olisikin järkevää selvittää kyseisten menetelmien toimivuutta ja taloudellisuutta tutkitun systeemin tapauksessa.

## LÄHTEET

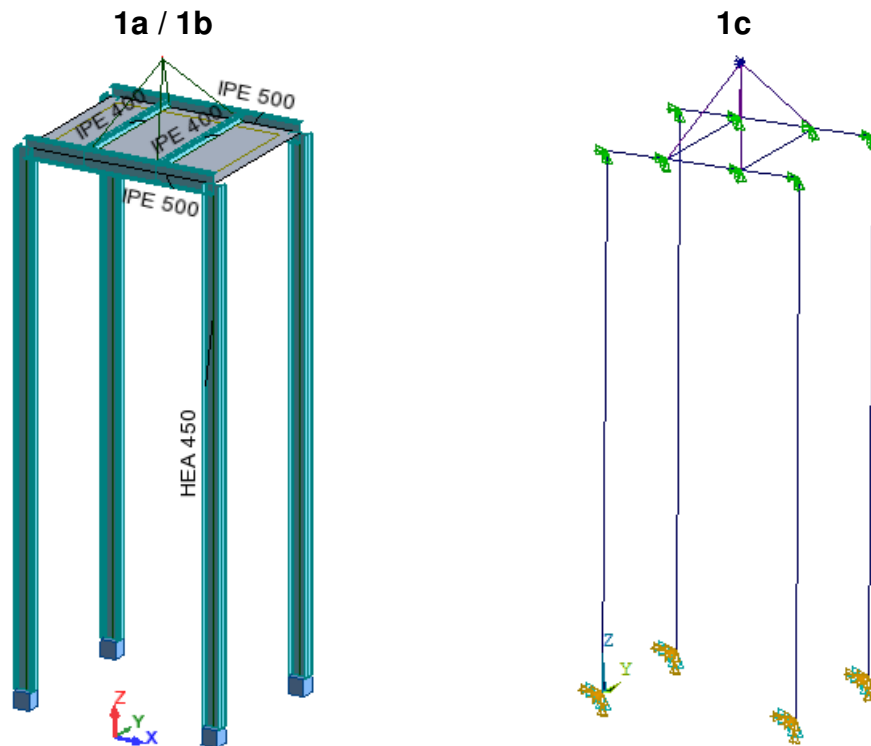
- [1] Clough, R.W. & Penzien, J., Dynamics of structures, 3rd ed., Computers and Structures, Inc., Berkeley, CA, 1995, 730 p.
- [2] Paz, M., Structural dynamics: theory and computation, 3rd ed., Chapman & Hall, New York, NY, 1991, 590 p. + 36 p. appendices.
- [3] Housner, G.W., The dynamic behavior of water tanks, Bulletin of the seismological society of America, Vol.53, Iss.2, 1963, pp. 381-387.
- [4] Housner, G.W., Dynamic pressures on accelerated fluid containers, in: Housner, G.W. (ed.), Selected earthquake engineering papers of George W. Housner, American Society of Civil Engineers, USA, 1990, pp. 199-219.
- [5] SFS-ISO 10816-3, Mechanical vibration. Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts. Part 3: Industrial machines with nominal power above 15 kw and nominal speeds between 120 r/min and 15 000 r/min when measured in situ , Suomen standardisoimisliitto, Helsinki, 2012, 12 p.
- [6] Assessing vibration: a technical guideline, Department of Environment and Conservation, Sydney, NSW, 2006, Saatavissa (viitattu 16.9.2014): <http://www.environment.nsw.gov.au/resources/noise/vibrationguide0643.pdf>
- [7] Salmi, T. & Virtanen, S., Dynamiikka, Pressus, Tampere, 2006, 480 s. + liitt. 14 s.
- [8] Salmi, T., Rakenteiden dynamiikka, Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere, 2003, Luentomoniste, 224 s.
- [9] Beards, C.F., Vibration analysis and control system dynamics, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1981, 169 p.
- [10] Lazan, B.J., Damping of materials and members in structural mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1968, 262 p. + 55 p. appendices.
- [11] Stevenson, J.D., Structural damping values as a function of dynamic response stress and deformation levels, Nuclear Engineering and Design, Vol.60, Iss.2, 1980, pp. 211-237.
- [12] Smith, J.W., Vibration of structures: applications in civil engineering design, Chapman and Hall, London, 1988, 338 p.

- [13] Chandrupatla, T.R. & Belegundu, A.D., Introduction to finite elements in engineering, 3rd international ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002, 453 p.
- [14] Cook, R.D., Concepts and applications of finite element analysis, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 2002, 719 p.
- [15] Rosart, J., Seismic design of elevated slurry storage tanks for AS/NZS 1170, Verkkoartikkeli, Saatavissa (viitattu 5.9.2014): <http://www.aees.org.au/wp-content/uploads/2013/11/41-Rosart.pdf>
- [16] Türker, T. & Bayraktar, A., Experimental and numerical investigation of brace configuration effects on steel structures, Journal of Constructional Steel Research, Vol.67, Iss.5, 2011, pp. 854-865.
- [17] SFS-EN 1998-4, Eurocode 8. Design of structures for earthquake resistance. Part 4: Silos, tanks and pipelines, Suomen standardisoimisliitto, Helsinki, 2007, 82 p.
- [18] Bandyopadhyay, K.K., Cornell, A., Costantino, C., Kennedy, R., Miller, C. & Veletsos, A., Seismic design and evaluation guidelines for the Department of Energy high-level waste storage tanks and appurtenances, Engineering Research and Applications Division, Dept. of Advanced Technology, Brookhaven National Laboratory, Associated Universities, inc., Upton, NY, 1995, 245 p. + 215 p. appendices.
- [19] Dodge, F.T., The new "dynamic behavior of liquids in moving containers", Southwest Research Institute, San Antonio, TX, 2000, 195 p.
- [20] Priestley, M.J.N., Davidson, B.J. & Wood, J.H., Seismic design of storage tanks, Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering, Vol.17, Iss.4, 1986, pp. 272-284.
- [21] Thiriat, P., Fluid-structure interaction: effects of sloshing in liquid-containing structures, Master's thesis, KTH Royal Institute of Technology, School of Architecture and the Built Environment, Stockholm, 2013, 71 p.
- [22] ASCE/SEI 7-10, Minimum design loads for buildings and other structures, American Society of Civil Engineers, Reston, VA, 2010, 608 p.
- [23] Cho, K.H. & Cho, S.Y., Seismic response of cylindrical steel tanks considering fluid-structure interaction, Steel Structures, Vol.7, Iss.2, 2007, pp. 147-152.
- [24] Veletsos, A.S., Parikh, V.H., Younan, A.H. & Bandyopadhyay, K., Dynamic response of a pair of walls retaining a viscoelastic solid, 52454, Springfield, VA, 1995, 57 p.

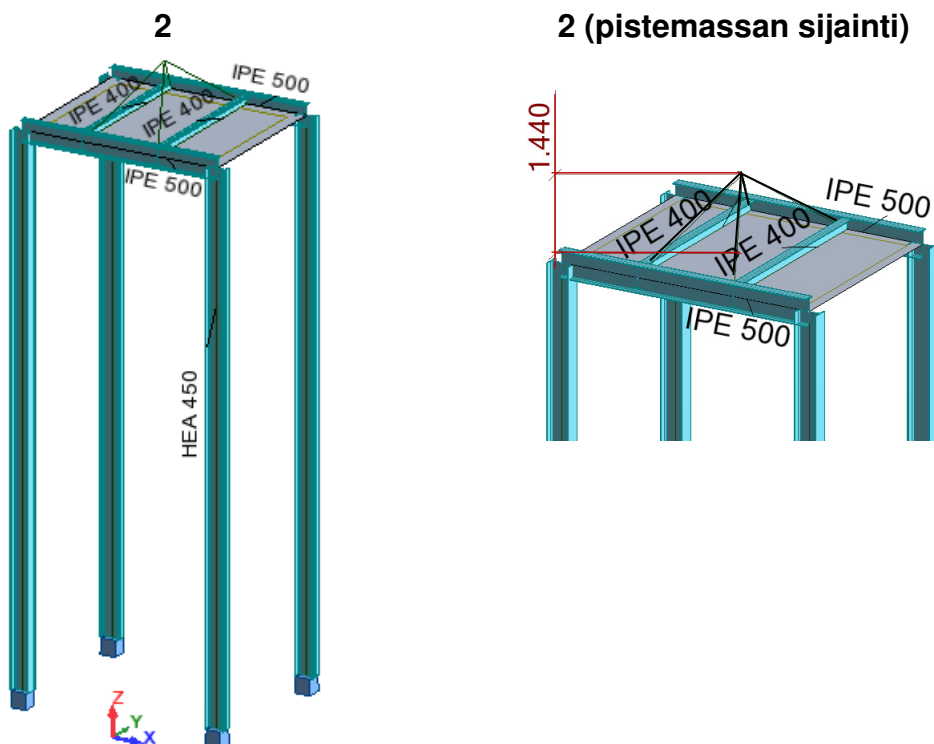
- [25] Livaoğlu, R. & Doğangün, A., Dynamic behavior and seismic performance of elevated tanks due to ground types defined in EC-8 and TEC-06, Verkkoartikkeli, 2006, Saatavissa (viitattu 5.9.2014): [http://www.ramazanlivaoglu.com/pdf/66257\\_ecee\\_06\\_paper1313.pdf](http://www.ramazanlivaoglu.com/pdf/66257_ecee_06_paper1313.pdf)
- [26] Siddiqi, Z.A., Hameed, R. & Akmal, U., Comparison of different bracing systems for tall buildings, Pakistan Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol.14, 2014, pp. 17-26.
- [27] Zegard, T., Baker, W.F., Mazurek, A. & Paulino, G.H., Geometrical aspects of lateral bracing systems: where should the optimal bracing point be? Journal of Structural Engineering, Vol.140, Iss.9, 2014.
- [28] Tafheem, Z. & Khusru, S., Structural behavior of steel building with concentric and eccentric bracing: A comparative study, International Journal of Civil and Structural Engineering, Vol.4, Iss.1, 2013, pp. 12-19.
- [29] Lawther, R., Assessing how changes to a structure can create gaps in the natural frequency spectrum, International Journal of Solids and Structures, Vol.44, Iss.2, 2007, pp. 614-635.
- [30] Bahai, H., Farahani, K. & Djoudi, M.S., Eigenvalue inverse formulation for optimising vibratory behaviour of truss and continuous structures, Computers and Structures, Vol.80, Iss.27-30, 2002, pp. 2397-2403.
- [31] Allahdadian, S., Boroomand, B. & Barekatein, A.R., Towards optimal design of bracing system of multi-story structures under harmonic base excitation through a topology optimization scheme, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.61, 2012, pp. 60-74.
- [32] Liang, Q.Q., Xie, Y.M. & Steven, G.P., Optimal topology design of bracing systems for multistory steel frames, Journal of Structural Engineering, Vol.126, Iss.7, 2000, pp. 823-829.
- [33] SFS-EN 1993-1-8, Eurocode 3. Teräsrakenteiden suunnittelu. Osa 1-8: Liitosten mitoitus, Suomen standardisoimisliitto, Helsinki, 2005, 148 s.
- [34] SFS-EN 1998-2, Eurocode 8. Design of structures for earthquake resistance. Part 2: Bridges, Suomen standardisoimisliitto, Helsinki, 2006, 146 p.
- [35] Panchal, D. & Purohit, S., Dynamic response control of a building model using bracings, Procedia Engineering, Vol.51, 2013, pp. 266-273.
- [36] Min, K.-., Kim, J. & Lee, S.-., Vibration tests of 5-storey steel frame with viscoelastic dampers, Engineering Structures, Vol.26, Iss.6, 2004, pp. 831-839.

- [37] Nelson, M.G., Lelinski, D. & Grönstrand, S., Design and operation of mechanical flotation machines, in: Malhotra, D., Taylor, P., Spiller, E. & LeVier, M. (ed.), Recent advances in mineral processing plant design, Society for Mining, Metallurgy & Exploration, Inc., Colorado, 2009, pp. 168-189.
- [38] Halvorsen, W.G. & Brown, D.L., Impulse technique for structural frequency response testing, Sound and Vibration, Vol.11, Iss.11, 1977, pp. 8-21.
- [39] Castillo, E.F. & Cruchaga, M.A., Experimental vibration analysis for a 3D scaled model of a three-floor steel structure, Latin American Journal of Solids and Structures, Vol.9, Iss.5, 2012, pp. 597-613.
- [40] Piluso, V., Montuori, R. & Troisi, M., Innovative structural details in MR-frames for free from damage structures, Mechanics Research Communications, Vol.58, 2014, pp. 146-156.
- [41] Chang, K.C., Soong, T.T., Oh, S.-. & Lai, M.L., Seismic behavior of steel frame with added viscoelastic dampers, Journal of Structural Engineering, Vol.121, Iss.10, 1995, pp. 1418-1426.
- [42] Filiatrault, A. & Cherry, S., Seismic design spectra for friction-damped structures, Journal of Structural Engineering, Vol.116, Iss.5, 1990, pp. 1334-1355.
- [43] ISO 2631-1:1997, Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements, International Organization of Standardization, Geneve, 1997, 31 p.
- [44] Flotation machines for the mining industry, Institute of Non-Ferrous Metals, Gliwice, Poland, Saatavissa (viitattu 19.12.2014): [http://www.imn.gliwice.pl/public/doc/maszyny-flotacyjne\\_en.pdf](http://www.imn.gliwice.pl/public/doc/maszyny-flotacyjne_en.pdf)
- [45] Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2014 Help, Saatavissa (viitattu 19.12.2014): <http://help.autodesk.com/view/RSAPRO/2014/ENU/>
- [46] Stolarski, T.A., Nakasone, Y. & Yoshimoto, S., Engineering analysis with ANSYS software, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2006, 480 p.
- [47] ANSYS Inc., Release 10.0 documentation for ANSYS, SAS IP, Inc., USA, 2005.

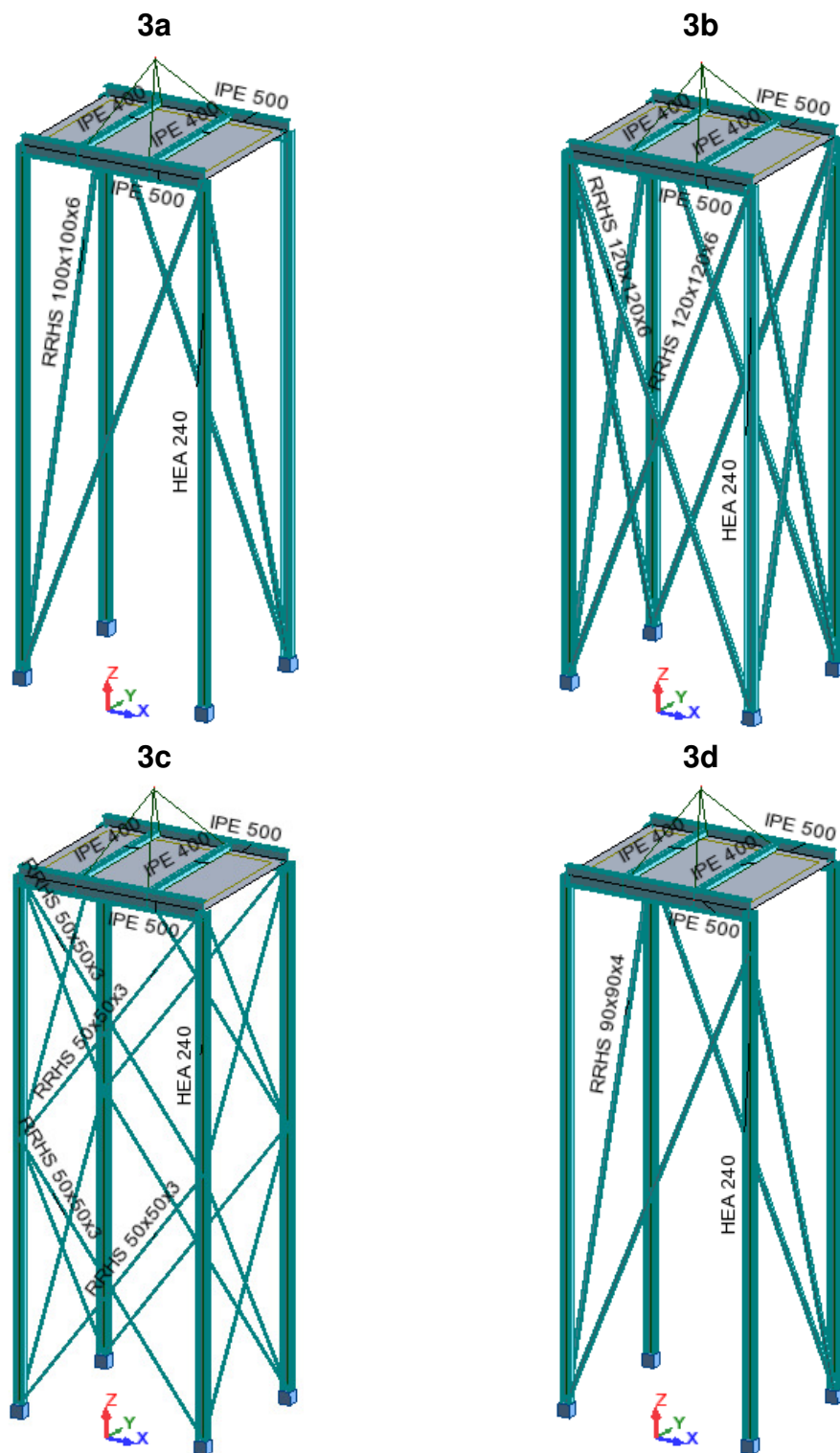
## LIITE A: YKSITTÄINEN JALUSTA: LASKENTAMALLIT



Kuva 35 Laskentamallit 1a-1c.

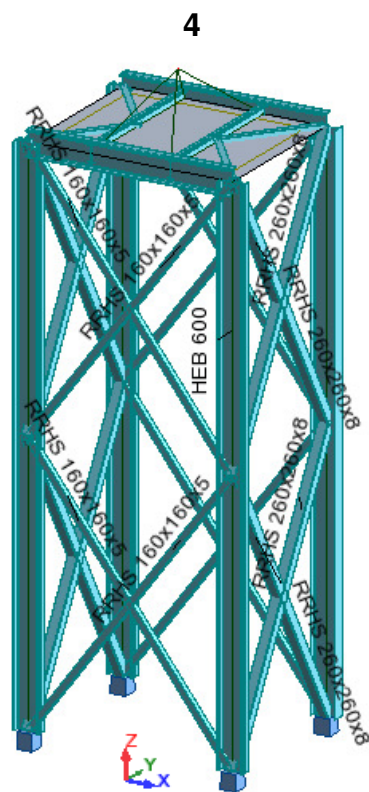
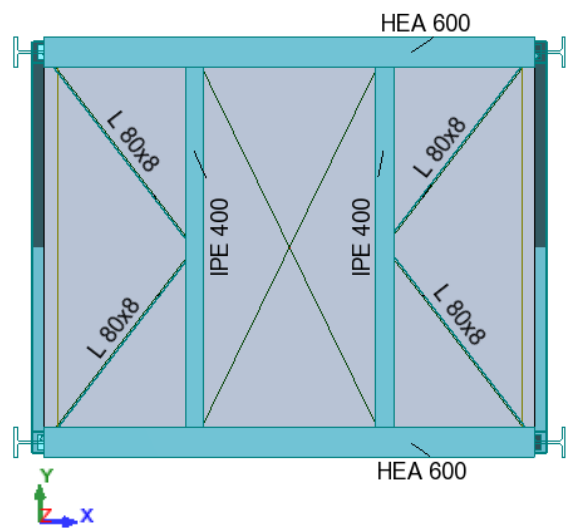


Kuva 36 Laskentamalli 2.

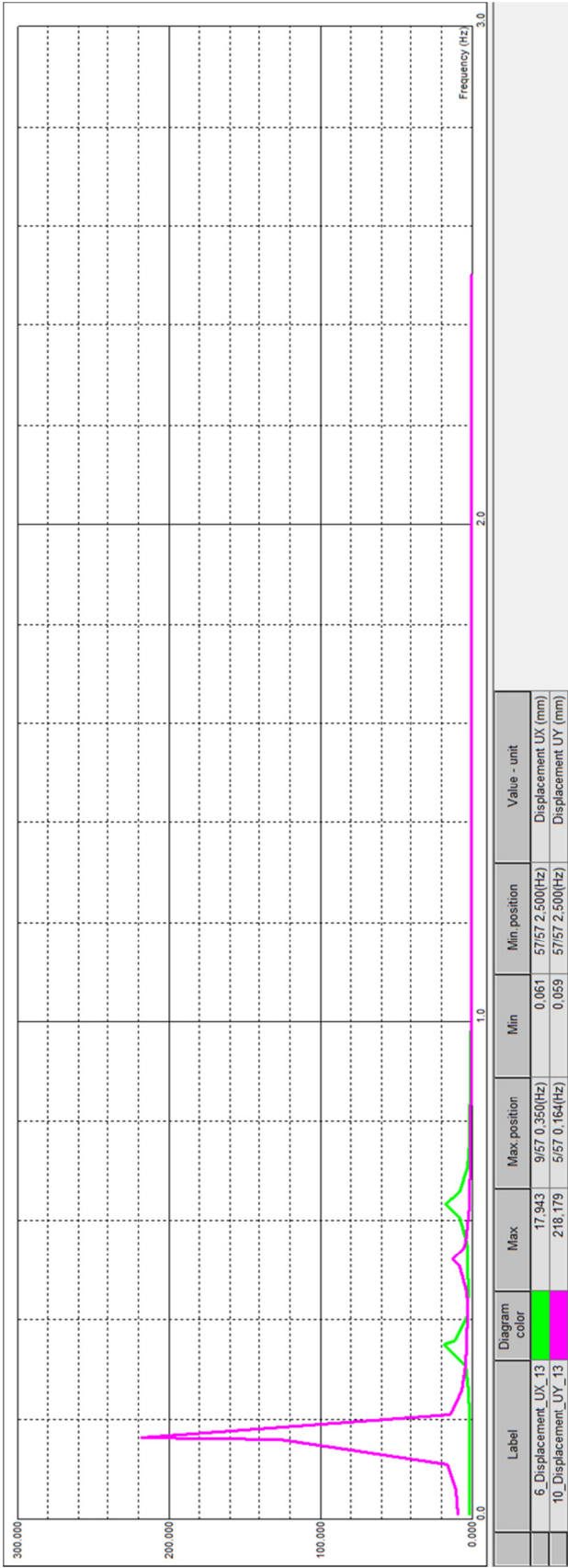


Kuva 37 Laskentamallit 3a-3d.

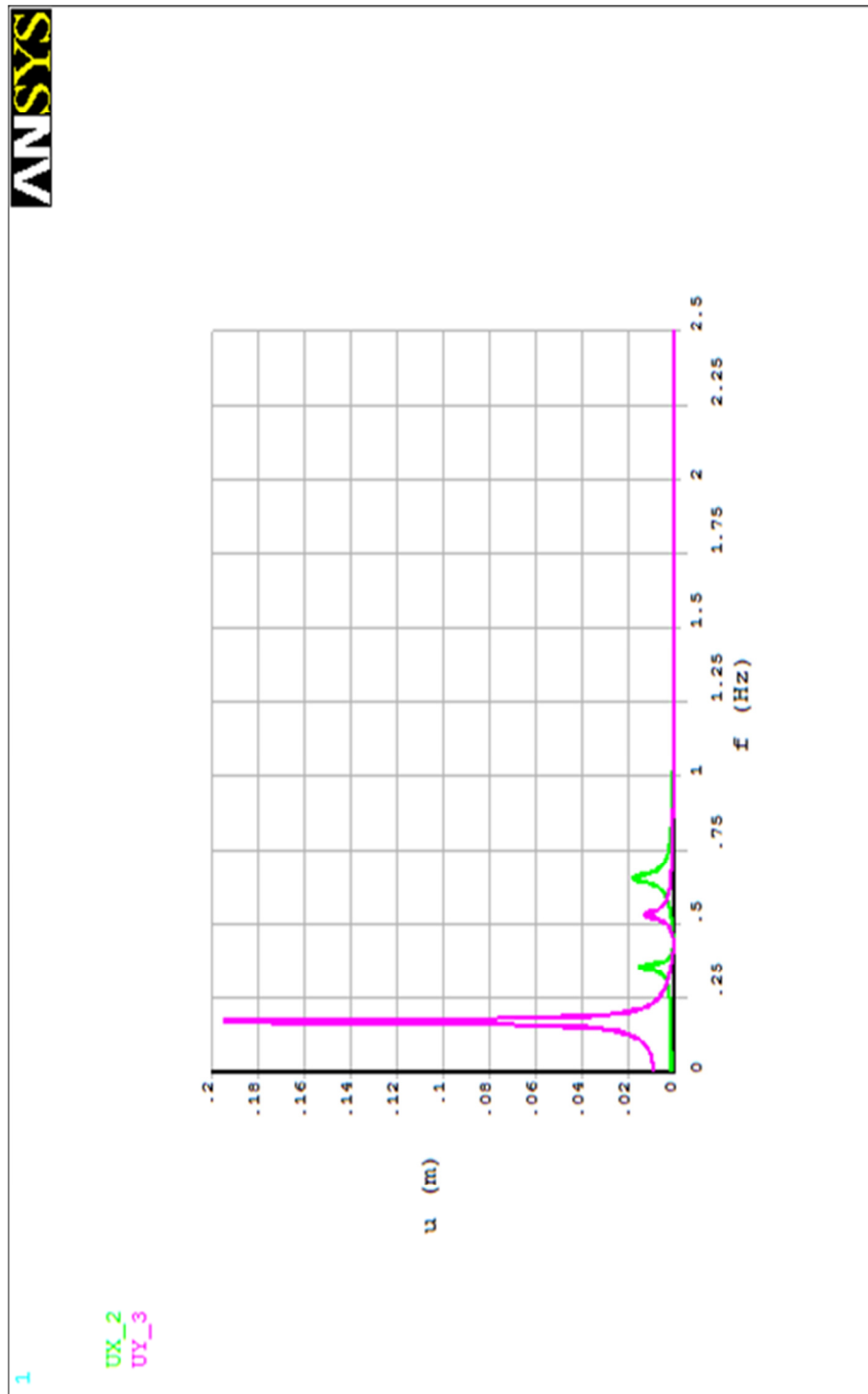


**4 (ylhäältä)***Kuva 38 Laskentamalli 4.*

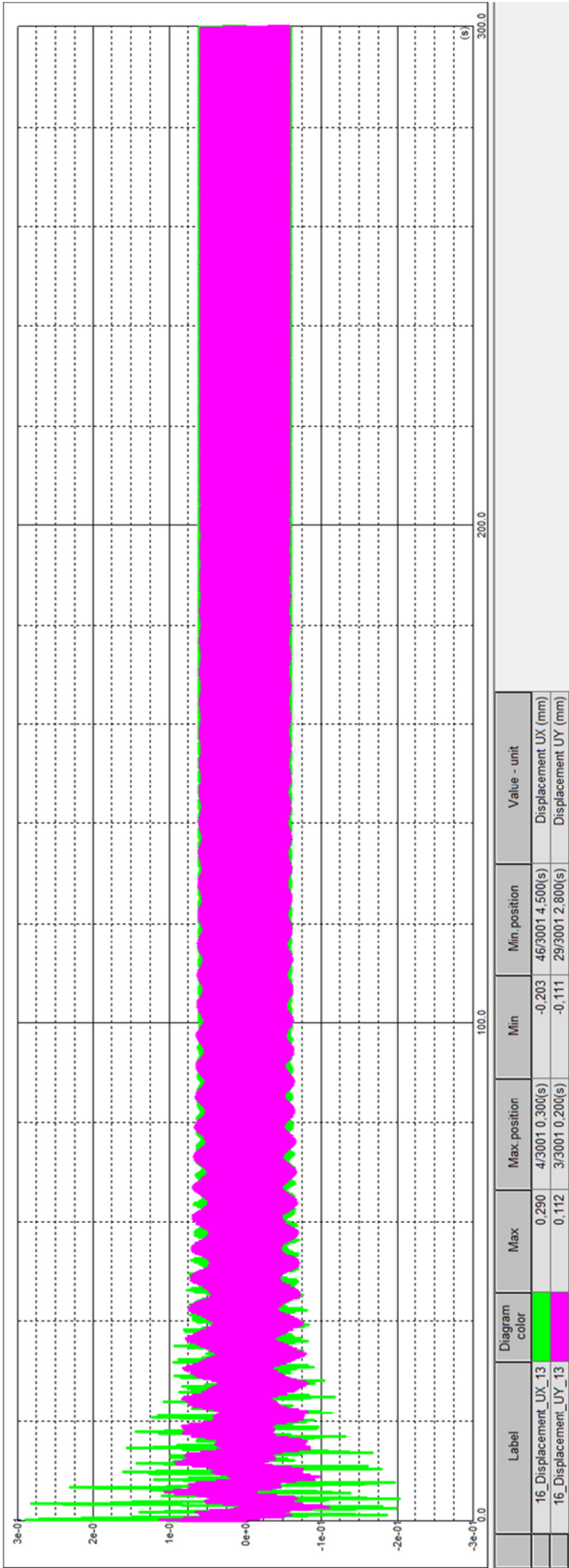
LIITE B: YKSITTÄINEN JALUSTA: TULOSKUVAAJAT



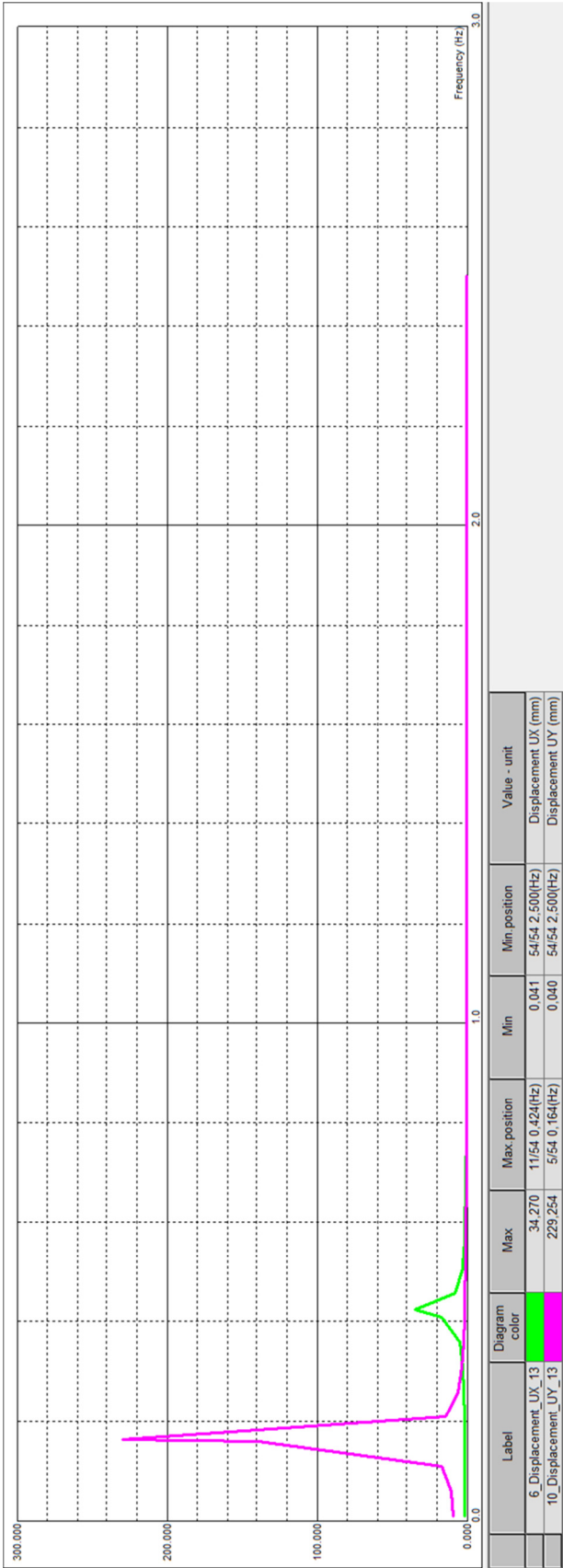
Kuva 39 Laskentamalli 1a: taajuusvastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.



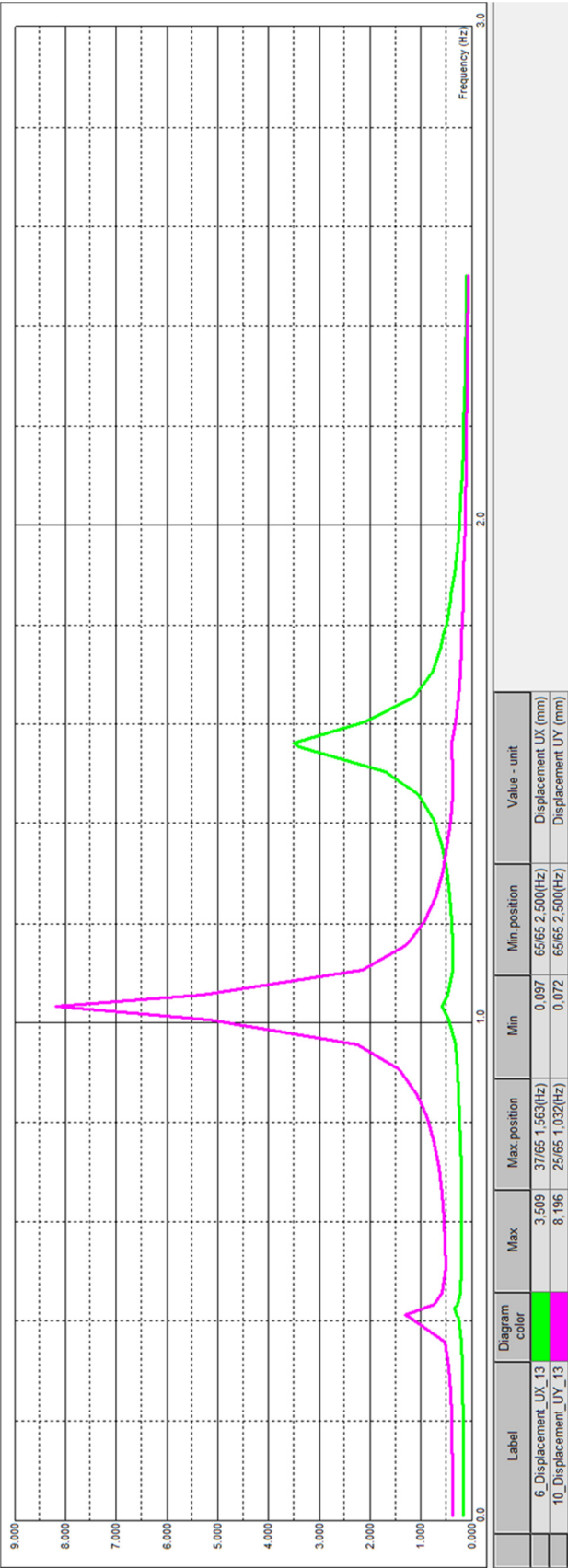
**Kuva 40** Laskentamalli 1c: taajuuksuvastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.



Kuva 41 Laskentamalli 1b: siirtymävasteen kuvaaja x- ja y-suunnassa.



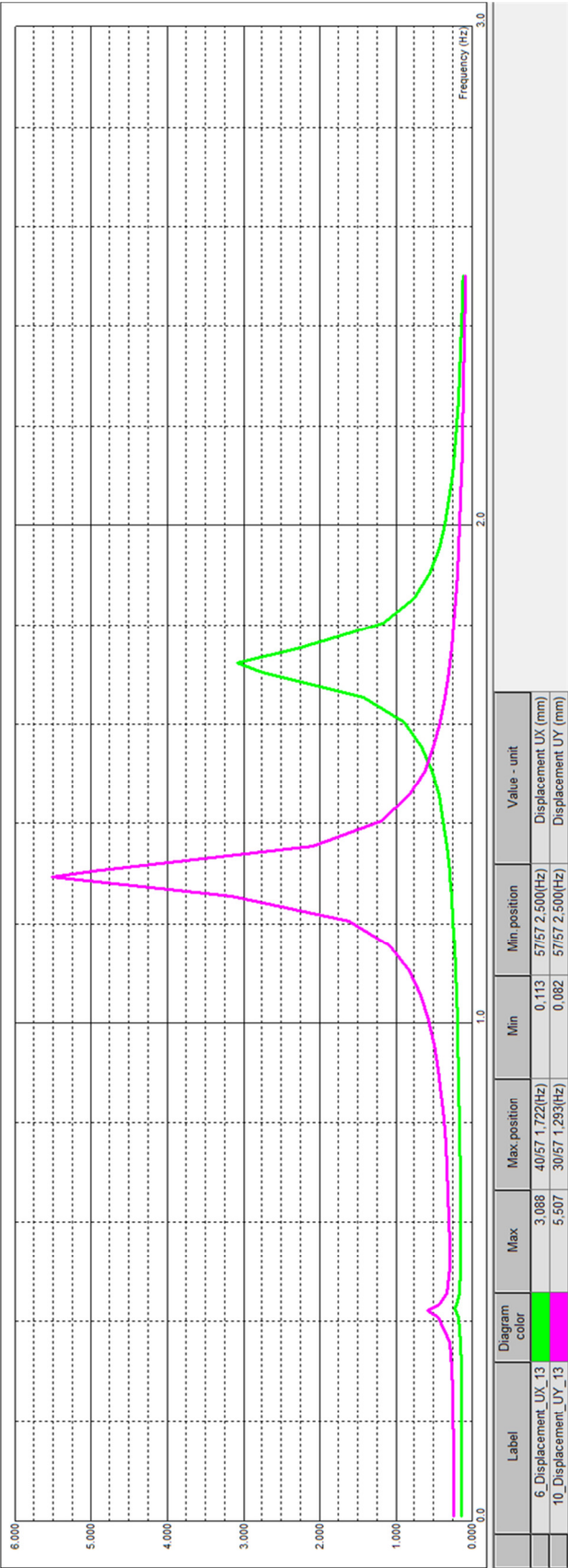
Kuva 42 Laskentamalli 2: taajuusvastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.



Kuva 43 Laskentamalli 3a: taajuuksivastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.

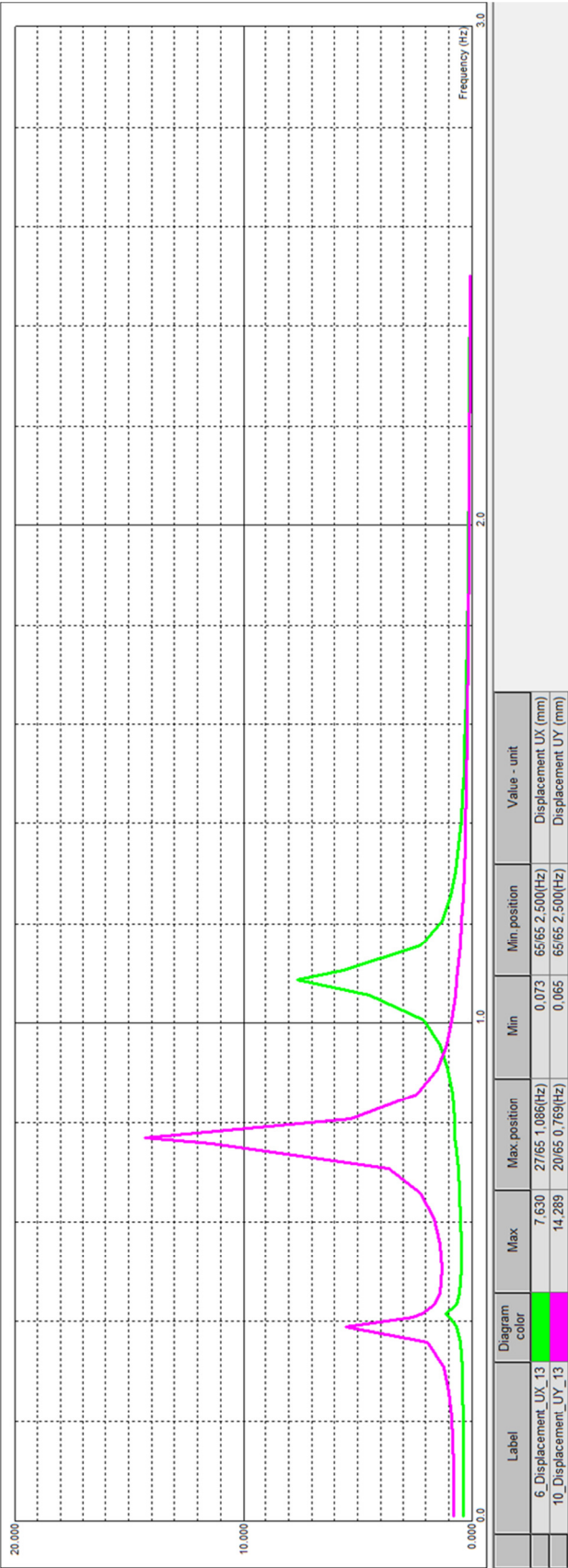


Kuva 44 Laskentamalli 3b: taajuuksuvastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.

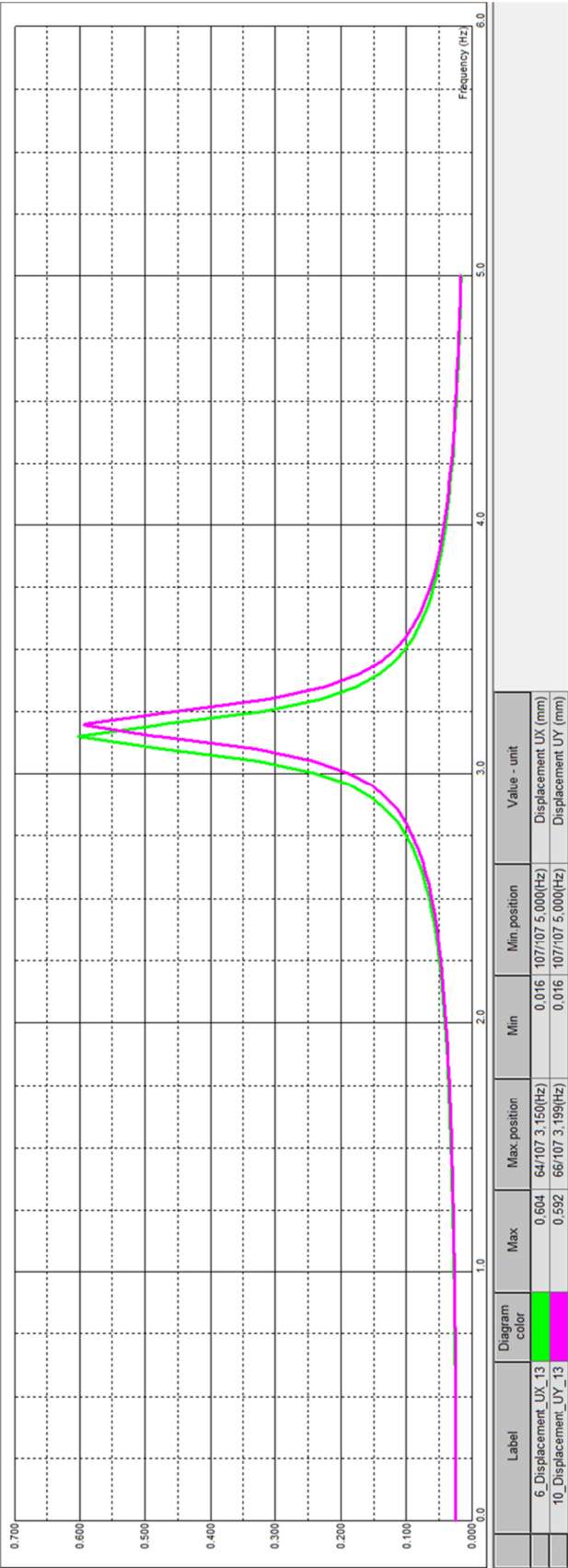


Kuva 45 Laskentamalli 3c: taajuuksuvastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.





Kuva 46 Laskentamalli 3d: taajuuksuvastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.



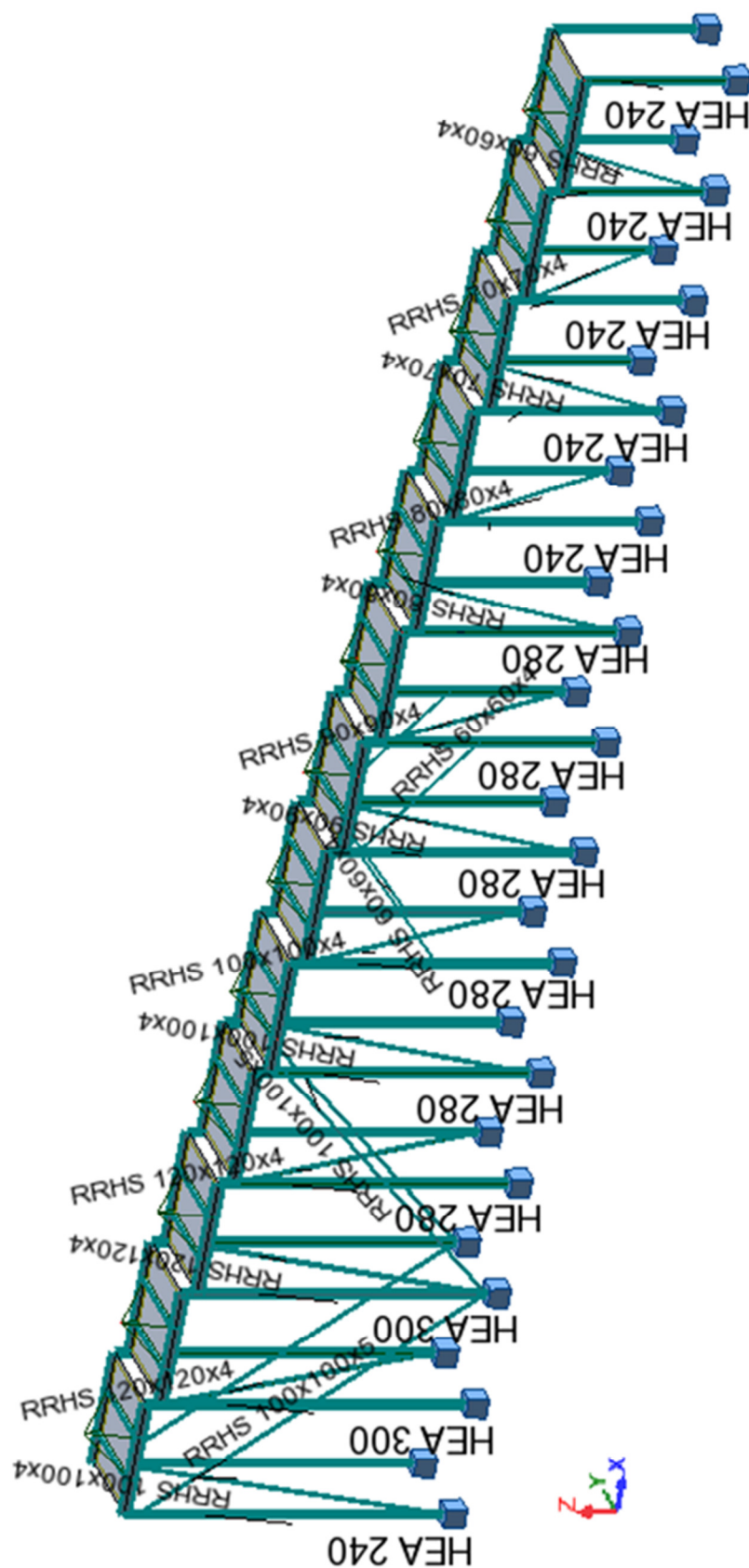
Kuva 47 Laskentamalli 4: taajuuksuvastefunktion kuvaaja x- ja y-suunnassa.

## LIITE C: YKSITTÄINEN JALUSTA: OMINAISTAAJUUDET

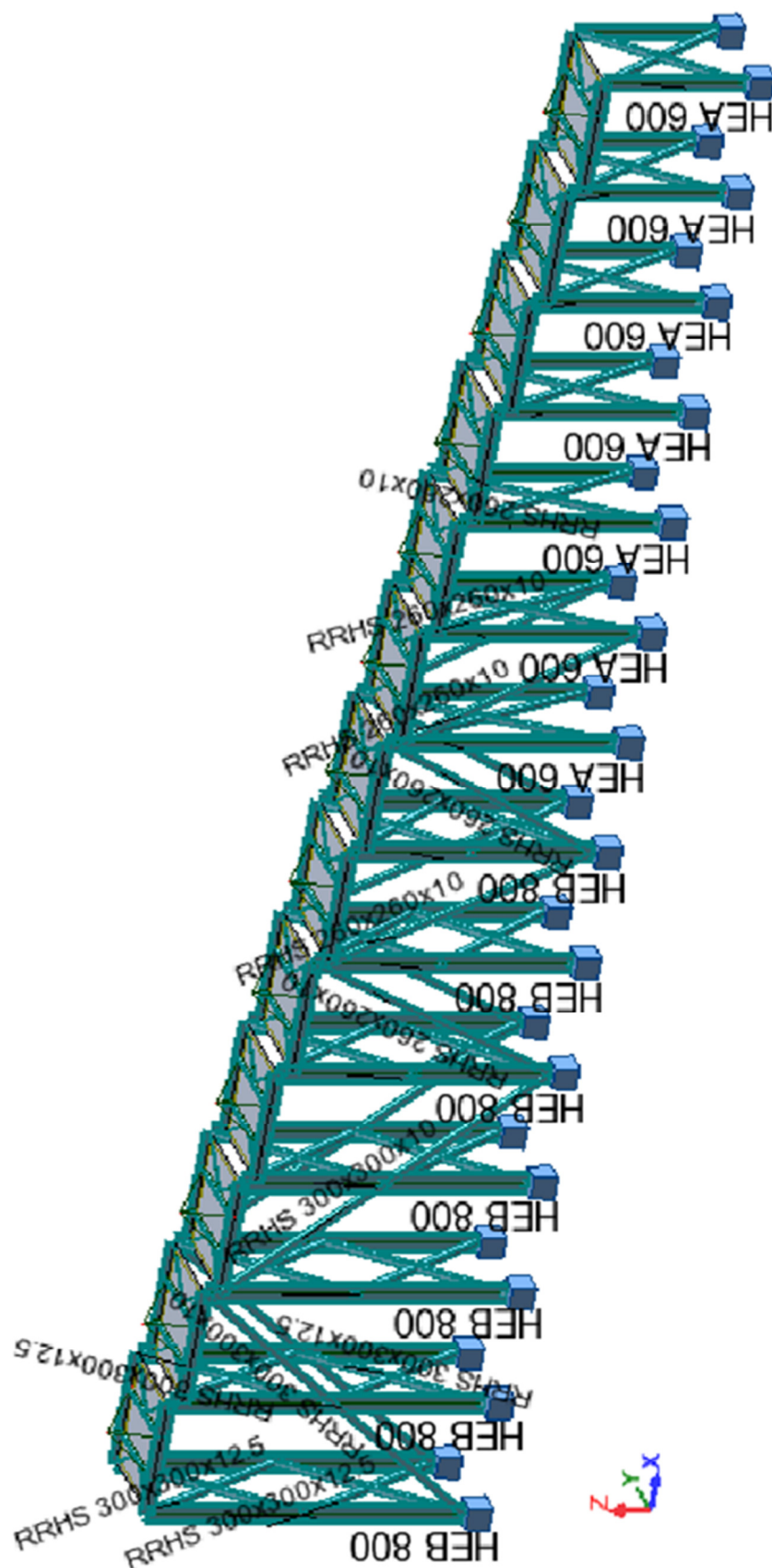
Ominais- taajuus	Mallin nro / $f$ (Hz)							
	1a / 1b	1c	2	3a	3b	3c	3d	4
	0,000			0,000	0,000	0,000	0,000	
<b>1</b>	0,164	0,168	0,164	0,413	0,424	0,420	0,390	3,152
<b>2</b>	0,350	0,353	0,424	0,424	0,428	0,426	0,415	3,199
<b>3</b>	0,434	0,434	0,546	0,434	0,434	0,434	0,434	3,931
<b>4</b>	0,522	0,530	4,030	1,032	1,507	1,293	0,769	3,931
<b>5</b>	0,546	0,554	4,030	1,563	2,122	1,722	1,086	3,974
<b>6</b>	0,633	0,654	4,030	1,768	2,150	2,481	1,372	3,974
<b>7</b>	4,030	3,976	4,030	1,772	2,153	2,581	1,871	6,969
<b>8</b>	4,030	3,976	5,236	1,772	2,153	2,582	1,871	8,487
<b>9</b>	4,030	3,976	6,720	1,776	2,154	2,582	1,872	8,505
<b>10</b>	4,030	3,976	6,746	1,851	2,155	2,582	1,873	8,527
<b>11</b>	6,305	3,982	6,783	1,856	2,155	2,582	1,975	8,535
<b>12</b>	6,415	3,982	6,842	1,856	2,155	2,582	1,975	8,535
<b>13</b>	6,736	6,755	7,012	1,861	2,213	2,582	1,976	8,535
<b>14</b>	6,827	6,773	8,681	2,109	2,253	2,582	1,976	8,537
<b>15</b>	6,875	6,782	8,972	3,543	2,256	2,583	3,717	8,538
<b>16</b>	6,915	6,853	9,915	4,096	2,256	2,583	3,967	8,539
<b>17</b>	8,420	8,812	9,917	4,096	2,256	2,583	4,096	8,542
<b>18</b>	8,972	8,903	9,959	4,096	2,258	2,583	4,096	8,543
<b>19</b>	9,853	8,971	18,819	5,839	2,258	2,583	5,846	8,544
<b>20</b>	9,917	9,264	18,819	5,890	2,258	2,583	5,904	8,544
<b>21</b>	9,918	10,972	18,864	5,924	2,317	2,584	6,112	8,544
<b>22</b>	18,816	18,819	18,939	5,973	3,210	2,594	6,131	8,546
<b>23</b>	18,818	18,819	24,779	6,204	3,230	2,977	6,946	8,579
<b>24</b>	18,819	18,832	24,779	6,240	3,230	2,977	6,978	8,583
<b>25</b>	18,997	19,018	24,856	8,079	4,096	2,977	8,147	9,203
<b>26</b>	24,544	24,796	24,908	8,090	4,096	2,977	8,543	9,227
<b>27</b>	24,755	24,796	25,006	8,106	5,878	2,978	8,543	11,967
<b>28</b>	24,778	25,025	25,080	8,112	5,924	2,978	8,594	12,704
<b>29</b>	24,780	25,036	36,769	8,244	5,962	2,978	8,595	13,308
<b>30</b>	24,843	25,132	37,209	8,478	5,995	2,978	8,972	13,308
<b>31</b>	24,932	25,258	40,352	8,480	6,273	2,978	9,005	13,605
<b>32</b>	36,816	36,598	40,981	8,500	6,391	2,978	9,005	13,605
<b>33</b>	37,757	37,547	87,759	8,505	8,442	2,978	9,062	15,450
<b>34</b>	39,897	40,096	90,496	8,972	8,972	2,978	9,062	15,458
<b>35</b>	40,978	40,965	100,079	9,665	9,730	2,978	9,650	15,732

<b>36</b>	68,105	88,113	101,766	9,917	9,811	2,978	9,917	15,742
<b>37</b>	68,106	97,902	111,038	9,917	9,812	2,979	9,917	15,746
<b>38</b>	73,713	103,682	111,846	10,026	9,813	2,980	10,038	15,752
<b>39</b>	77,064	104,238	117,771	10,026	9,820	3,788	10,140	15,801
<b>40</b>	89,438	117,296	131,058	10,050	9,862	3,788	10,624	15,859
<b>41</b>	90,918	121,804	154,443	10,289	9,862	3,807	10,679	15,978
<b>42</b>	111,271	129,734	186,804	24,779	9,865	3,807	24,779	15,980
<b>43</b>	111,687	134,912	189,194	24,780	9,887	6,122	24,780	15,995
<b>44</b>	115,121	181,850	201,103	31,672	9,917	6,253	31,605	15,997
<b>45</b>	125,083	200,266	268,652	32,037	9,917	8,289	32,022	16,007
<b>46</b>	154,449	216,185	272,317	35,181	10,025	8,972	32,674	16,008
<b>47</b>	180,855	246,058	331,467	35,295	10,025	9,868	32,793	16,021
<b>48</b>	180,867	311,642	332,160	36,805	10,051	9,917	36,782	16,050
<b>49</b>	188,462	321,351	338,187	37,765	10,270	9,919	37,762	17,717
<b>50</b>		341,964	340,292					17,841





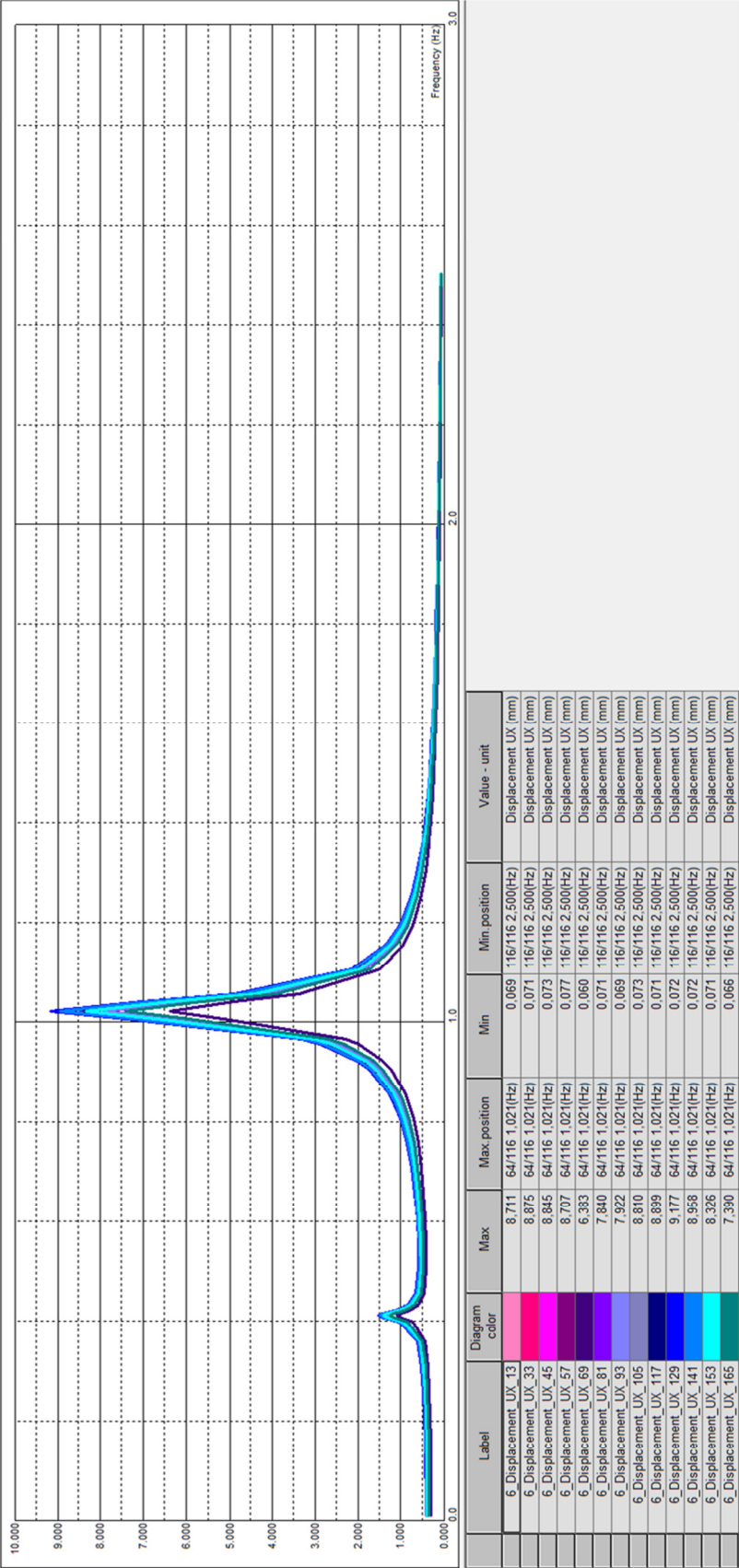
Kuva 49 Laskentamalli 6.



Kuva 50 Laskentamalli 7.

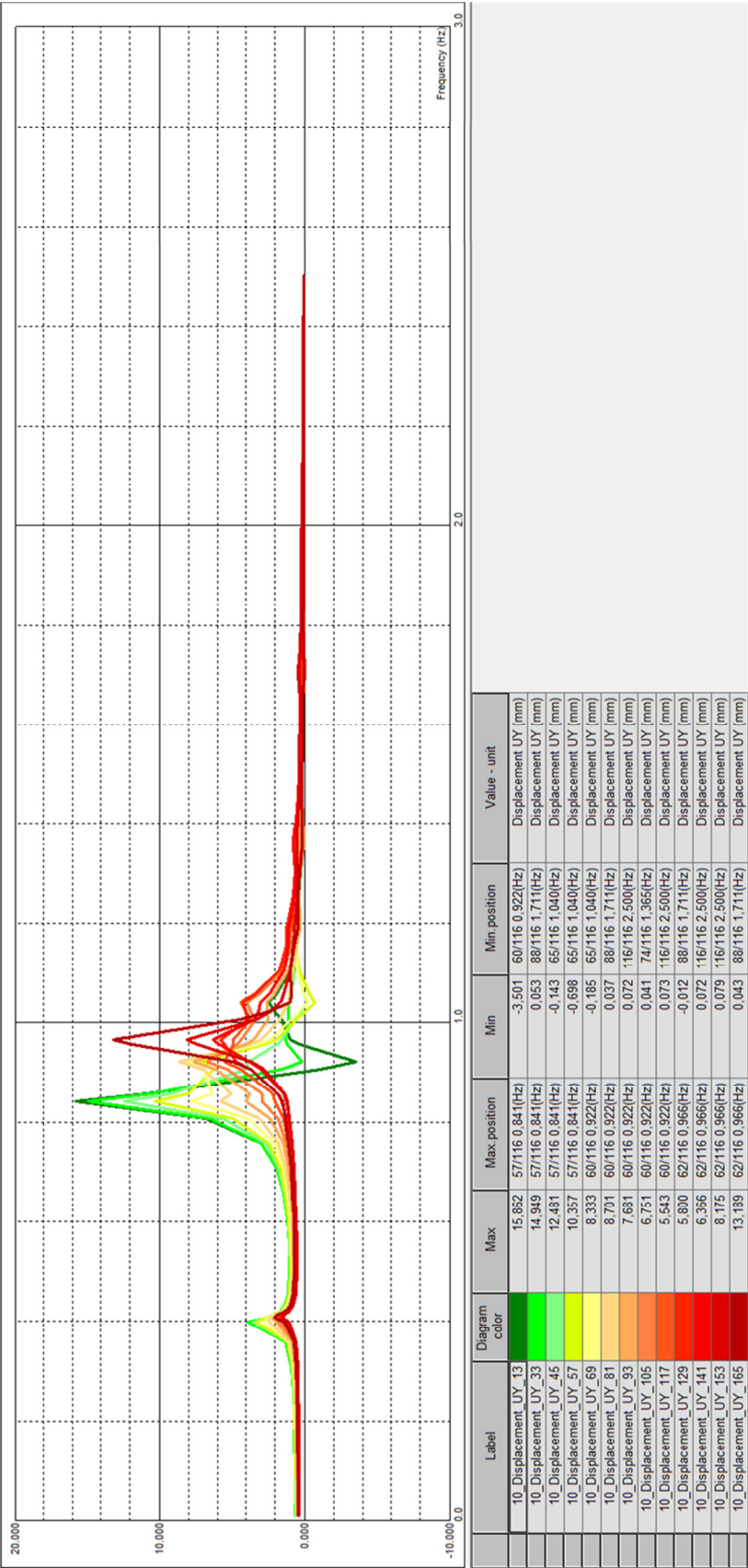


LIITE E: 13 KENNON JALUSTA: TULOSKUVAAJAT

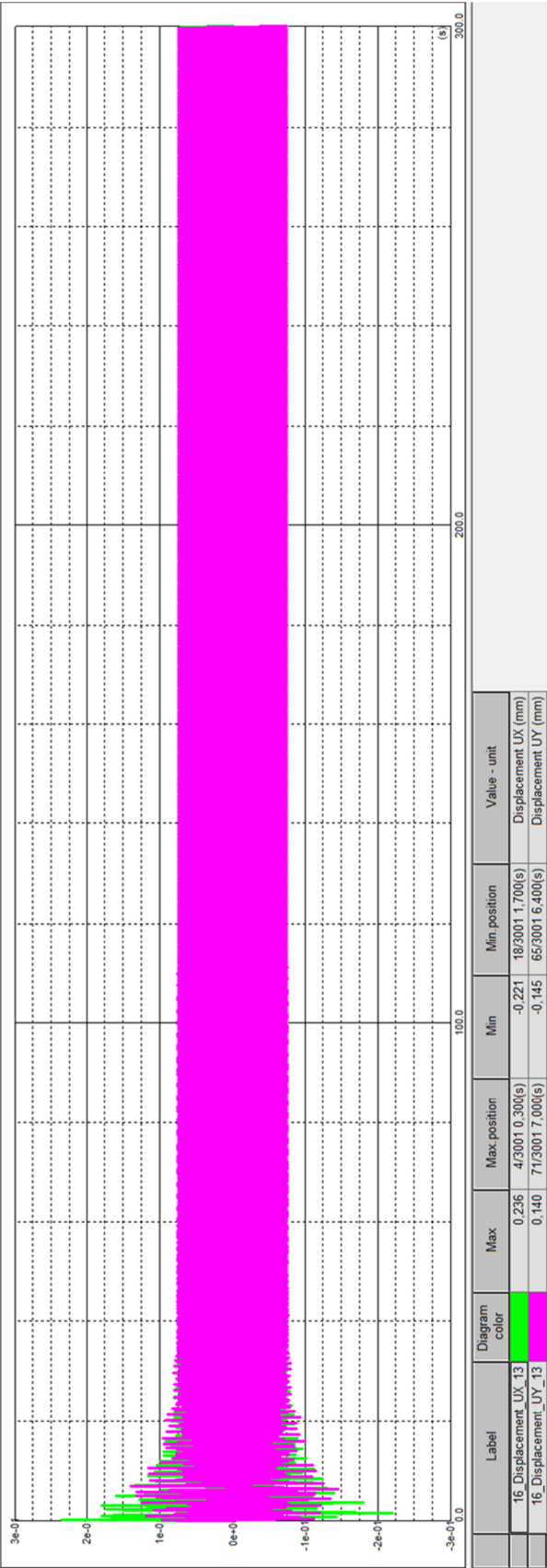


Kuva 51 Laskentamalli 5a: taajuuksuvastefunktion kuvaaja x-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.

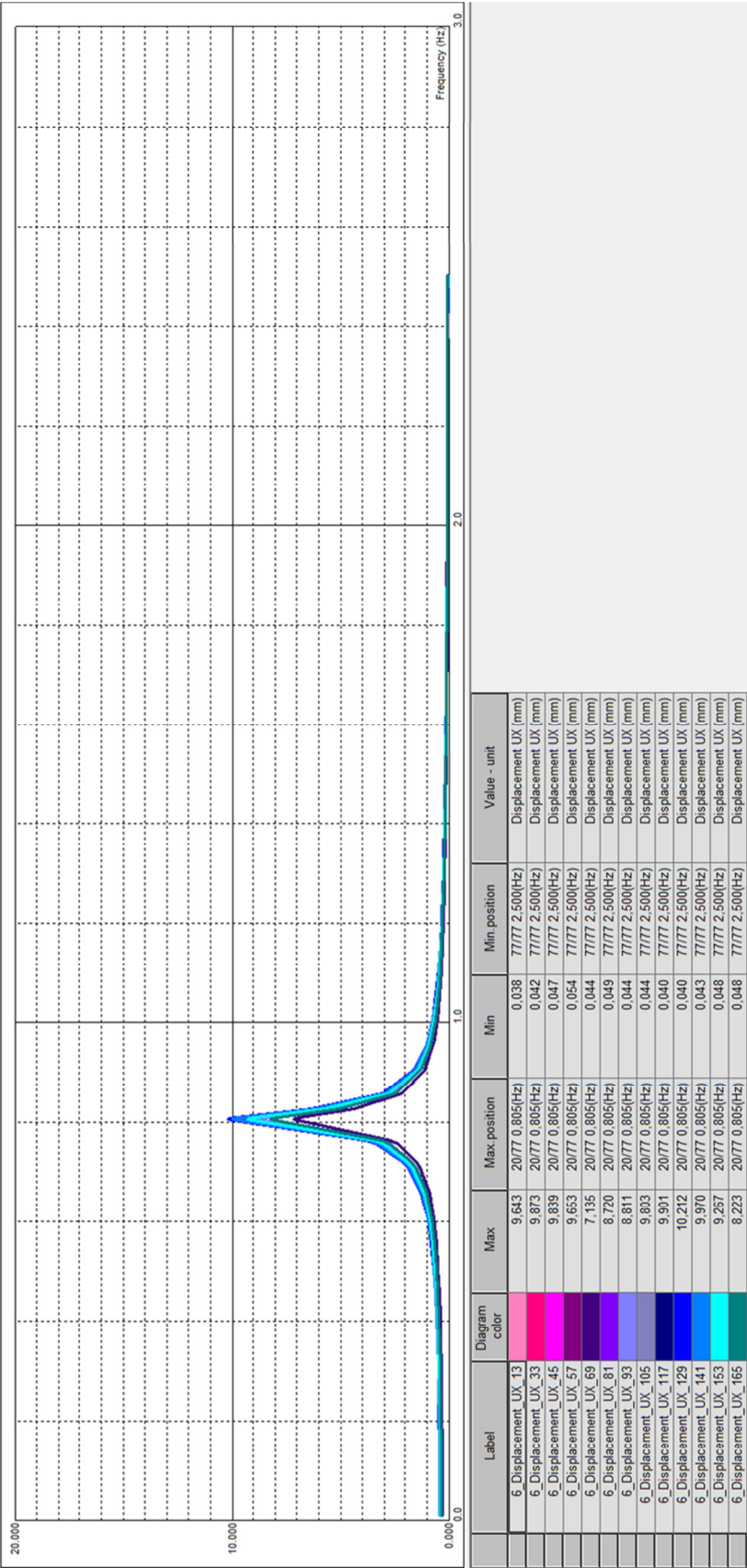




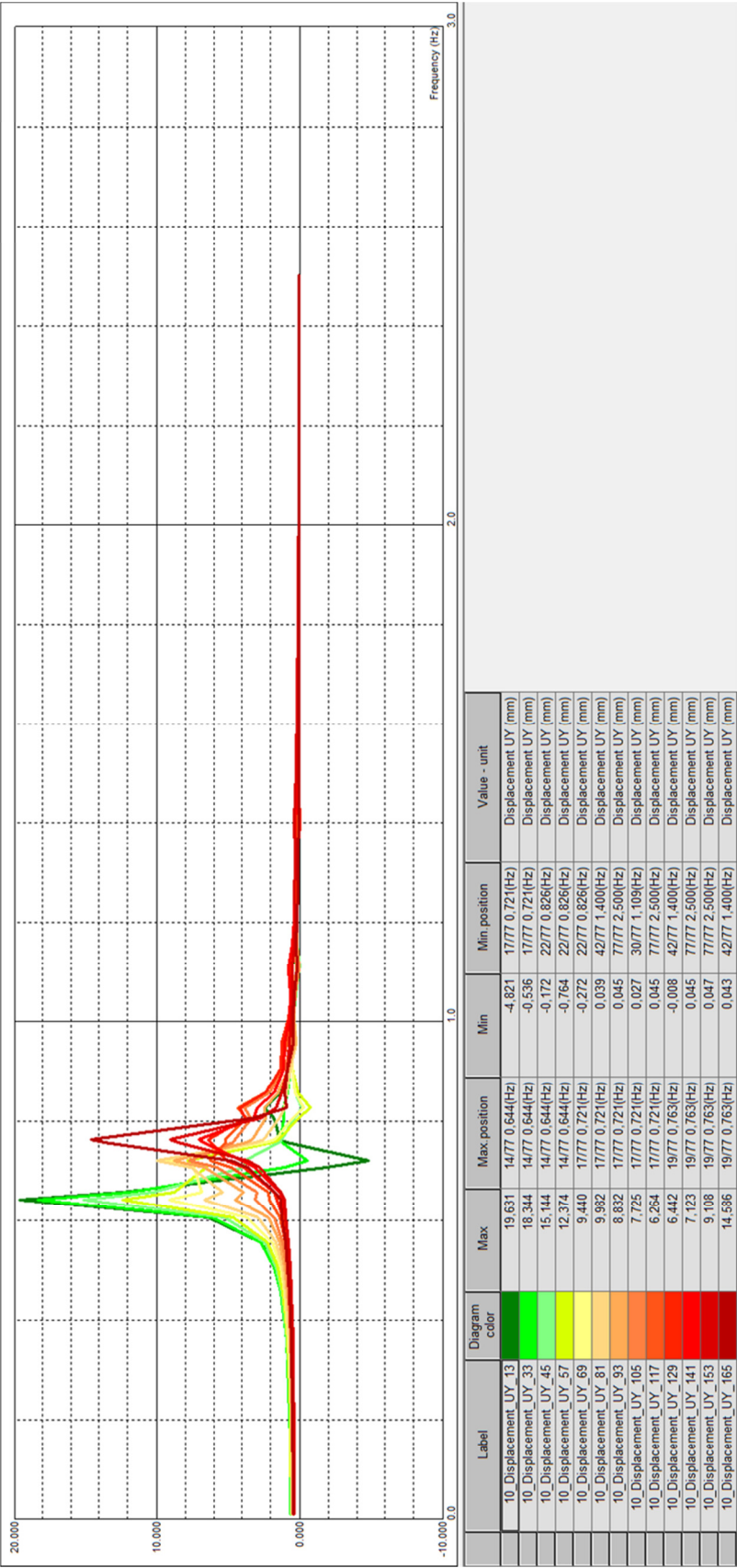
Kuva 52 Laskentamalli 5a: taajuuksvastefunktion kuvaaja y-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.



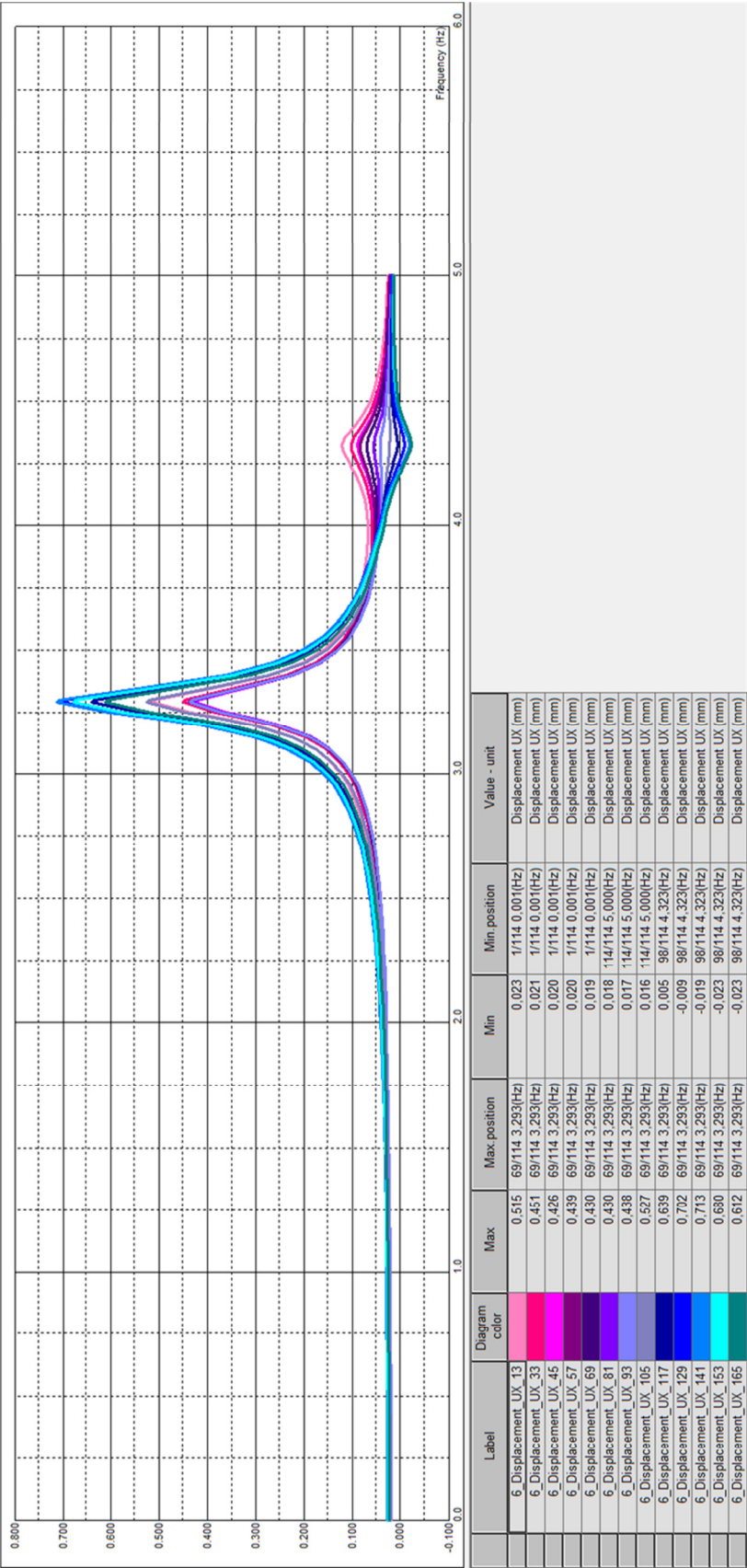
Kuva 53 Laskentamalli 5b: siirtymävasteen kuvaaja x- ja y-suunnassa solmulle 13.



Kuva 54 Laskentamalli 6: taajuvastefunktion kuvaaja x-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.

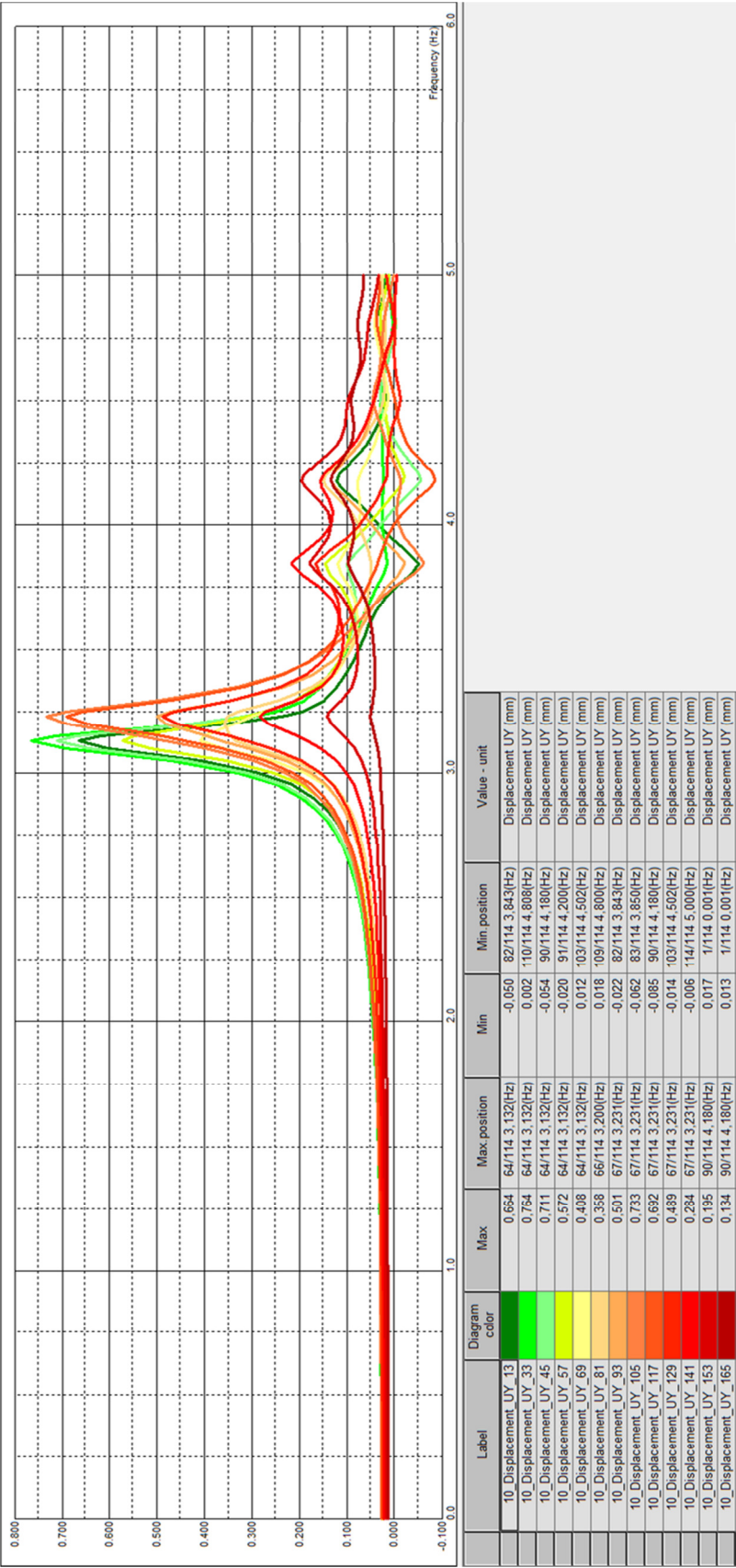


Kuva 55 Laskentamalli 6: taajuuksvastefunktion kuvaaja y-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.



Kuva 56 Laskentamalli 7: taajuusvastefunktion kuvaaja x-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.





Kuva 57 Laskentamalli 7: taajuuksuvastefunktion kuvaaja y-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.

# LIITE F: 13 KENNON JALUSTA: VASTEIDEN AMPLITUDIT

**Taulukko 14** Laskentamallit 5-7: siirtymävasteen amplitudit x- ja y-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.

Solmu nro	Siirtymävasteen amplitudi, $f=2,5$ Hz										Siirtymävasteen maksimiampplitudi, $f=0...2,5$ (*0...5) Hz						
	$u_x$ (mm)					$u_y$ (mm)					$u_x$ (mm)			$u_y$ (mm)			
	5a	5b	6	7	5a	5b	6	7	5a	6	7*	5a	6	7*	5a	6	7*
13	0,069	0,072	0,038	0,053	0,063	0,076	0,041	0,066	8,711	9,643	0,515	15,862	19,631	0,664			
33	0,071	0,074	0,042	0,046	0,064	0,059	0,042	0,076	8,875	9,873	0,451	14,949	18,344	0,764			
45	0,073	0,073	0,047	0,044	0,071	0,069	0,044	0,074	8,845	9,839	0,426	12,481	15,144	0,711			
57	0,077	0,069	0,054	0,045	0,064	0,061	0,043	0,066	8,707	9,653	0,439	10,357	12,374	0,572			
69	0,060	0,048	0,044	0,043	0,071	0,069	0,044	0,055	6,383	7,135	0,430	8,333	9,440	0,408			
81	0,071	0,063	0,049	0,043	0,064	0,065	0,043	0,051	7,840	8,720	0,430	8,701	9,982	0,358			
93	0,069	0,068	0,044	0,043	0,072	0,070	0,045	0,057	7,922	8,811	0,438	7,681	8,832	0,501			
105	0,073	0,079	0,044	0,050	0,066	0,066	0,043	0,071	8,810	9,803	0,527	6,751	7,725	0,733			
117	0,071	0,081	0,040	0,059	0,073	0,069	0,045	0,068	8,899	9,901	0,639	5,543	6,264	0,692			
129	0,071	0,082	0,040	0,063	0,068	0,067	0,044	0,056	9,177	10,212	0,702	5,800	6,442	0,489			
141	0,072	0,075	0,043	0,064	0,072	0,067	0,045	0,043	8,958	9,970	0,713	6,366	7,123	0,284			
153	0,071	0,063	0,048	0,061	0,079	0,079	0,047	0,031	8,326	9,267	0,680	8,175	9,108	0,195			
165	0,066	0,052	0,048	0,055	0,072	0,051	0,045	0,020	7,390	8,223	0,612	13,189	14,586	0,134			
<b>maksimi</b>	0,077	0,082	0,054	0,064	0,079	0,079	0,047	0,076	9,177	10,212	0,713	15,862	19,631	0,764			

**Taulukko 15** Laskentamallit 5-7: nopeusvasteen amplitudit x- ja y-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.

Solmu nro	Nopeusvasteen amplitudi, $f=2,5$ Hz							Nopeusvasteen maksimiampplitudi, $f=0...2,5$ (*0...5) Hz						
	5a	5b	6	7	5a	5b	$v_y$ (mm/s)	7	5a	6	7*	5a	6	7*
13	1,08	1,14	0,60	0,83	0,99	1,19	0,65	1,04	55,90	48,78	10,66	83,84	79,38	13,07
33	1,11	1,16	0,66	0,73	1,01	0,93	0,67	1,20	56,95	49,95	9,34	79,01	74,17	15,04
45	1,15	1,14	0,74	0,69	1,12	1,09	0,69	1,16	56,76	49,77	8,81	65,97	61,23	14,00
57	1,20	1,08	0,85	0,70	1,01	0,95	0,67	1,04	55,88	48,83	9,08	54,75	50,03	11,25
69	0,94	0,75	0,69	0,68	1,12	1,09	0,69	0,86	40,96	36,09	8,90	48,29	42,77	8,03
81	1,12	0,99	0,77	0,67	1,01	1,01	0,67	0,80	50,31	44,11	8,90	50,42	45,23	7,21
93	1,08	1,06	0,69	0,67	1,14	1,11	0,70	0,89	50,84	44,57	9,06	44,52	40,02	10,17
105	1,15	1,23	0,69	0,78	1,04	1,04	0,68	1,12	56,54	49,59	10,91	39,12	35,00	14,88
117	1,12	1,27	0,63	0,92	1,15	1,08	0,71	1,07	57,11	50,09	13,23	32,13	28,38	14,06
129	1,12	1,29	0,62	0,99	1,06	1,05	0,68	0,88	58,89	51,66	14,52	35,19	30,89	9,93
141	1,12	1,18	0,68	1,00	1,13	1,04	0,71	0,67	57,49	50,44	14,76	38,63	34,15	5,76
153	1,11	1,00	0,75	0,95	1,25	1,25	0,74	0,49	53,43	46,88	14,07	49,61	43,67	5,13
165	1,04	0,81	0,75	0,86	1,13	0,80	0,71	0,31	47,42	41,60	12,67	80,03	69,94	3,53
<b>maksimi</b>	1,20	1,29	0,85	1,00	1,25	1,25	0,74	1,20	58,89	51,66	14,76	83,84	79,38	15,04



**Taulukko 16** Laskentamallit 5-7: kiihtyvyyssvasteen amplitudit x- ja y-suunnassa jokaisen kennon kohdalla.

		Kiihtyvyyssvasteen amplitudi, $f=2,5$ Hz						Kiihtyvyyssvasteen maksimiampitudi, $f=0...2,5$ (*0...5) Hz									
Solmu nro	$a_x$ (mm/s <sup>2</sup> )			$a_y$ (mm/s <sup>2</sup> )			$a_x$ (mm/s <sup>2</sup> )			$a_y$ (mm/s <sup>2</sup> )							
	5a	5b	7	5a	5b	7	5a	5b	7	5a	5b	7					
13	16,9	17,9	9,3	13,0	18,7	10,2	16,4	15,5	18,7	10,2	16,4	358,7	246,8	220,6	443,1	321,0	257,2
33	17,4	18,2	10,3	11,5	14,6	10,5	18,8	15,9	14,6	10,5	18,8	365,5	252,7	193,3	417,6	299,9	296,0
45	18,0	17,9	11,6	10,8	17,1	10,9	18,3	17,6	17,1	10,9	18,3	364,3	251,8	182,4	348,7	247,6	275,6
57	18,9	17,0	13,4	11,1	15,8	10,5	16,3	15,8	15,0	10,5	16,3	358,6	247,0	187,9	289,4	202,3	221,5
69	14,7	11,8	10,8	10,7	17,6	10,9	13,5	17,6	17,1	10,9	13,5	262,9	182,6	184,1	279,9	193,8	158,1
81	17,5	15,6	12,1	10,6	15,9	10,5	12,5	15,9	16,0	10,5	12,5	322,9	223,2	184,2	292,2	204,9	145,8
93	16,9	16,7	10,9	10,6	17,8	11,0	14,0	17,8	17,4	11,0	14,0	326,3	225,5	187,4	258,0	181,3	206,5
105	18,0	19,4	10,9	12,2	16,3	10,7	17,5	16,3	16,3	10,7	17,5	362,8	250,9	225,7	226,7	158,6	302,1
117	17,5	19,9	9,9	14,5	18,1	11,1	16,8	18,1	17,1	11,1	16,8	366,5	253,4	273,8	187,7	128,6	285,4
129	17,6	20,3	9,8	15,6	16,7	10,7	13,8	16,7	16,5	10,7	13,8	377,9	261,4	300,4	213,6	148,1	201,7
141	17,7	18,5	10,7	15,7	17,7	11,2	10,5	17,7	16,4	11,2	10,5	368,9	255,2	305,4	234,4	163,7	125,8
153	17,4	15,7	11,8	15,0	19,6	11,6	7,7	19,6	19,6	11,6	7,7	342,9	237,2	291,2	301,0	209,4	134,6
165	16,3	12,7	11,8	13,5	17,7	11,2	4,9	17,7	12,6	11,2	4,9	304,3	210,4	262,2	485,6	335,3	92,7
maksimi	18,9	20,3	13,4	15,7	19,6	11,6	18,8	19,6	19,6	11,6	18,8	377,9	261,4	305,4	485,6	335,3	302,1

# **LIITE G: 13 KENNON JALUSTA: OMINAISTAAJUUDET**

Ominais- taajuus	Mallin nro / $f$ (Hz)						
	5a / 5b	6	7				
	0,000			<b>24</b>	0,431	2,019	6,653
	0,000			<b>25</b>	0,431	2,076	6,663
	0,000			<b>26</b>	0,431	2,077	6,673
	0,000			<b>27</b>	0,434	2,513	6,676
	0,000			<b>28</b>	0,434	2,513	6,690
	0,000			<b>29</b>	0,434	2,765	6,700
	0,000			<b>30</b>	0,434	2,886	6,726
	0,000			<b>31</b>	0,434	2,904	6,778
	0,000			<b>32</b>	0,434	3,018	6,780
	0,000			<b>33</b>	0,434	3,018	6,902
	0,000			<b>34</b>	0,434	3,020	6,915
	0,000			<b>35</b>	0,434	3,021	7,319
	0,000			<b>36</b>	0,434	3,045	7,334
	0,000			<b>37</b>	0,434	3,046	7,339
	0,000			<b>38</b>	0,434	3,046	7,340
<b>1</b>	0,399	0,644	3,132	<b>39</b>	0,434	3,047	7,403
<b>2</b>	0,407	0,721	3,231	<b>40</b>	0,841	3,390	7,416
<b>3</b>	0,410	0,763	3,293	<b>41</b>	0,922	3,394	7,846
<b>4</b>	0,412	0,805	3,614	<b>42</b>	0,966	3,394	8,052
<b>5</b>	0,413	0,826	3,843	<b>43</b>	1,021	3,394	8,087
<b>6</b>	0,418	0,958	4,180	<b>44</b>	1,040	3,455	8,097
<b>7</b>	0,422	1,109	4,207	<b>45</b>	1,190	3,467	8,100
<b>8</b>	0,424	1,218	4,219	<b>46</b>	1,365	3,545	8,194
<b>9</b>	0,424	1,262	4,225	<b>47</b>	1,384	3,642	8,314
<b>10</b>	0,426	1,384	4,226	<b>48</b>	1,385	3,671	8,386
<b>11</b>	0,427	1,384	4,323	<b>49</b>	1,385	3,688	8,404
<b>12</b>	0,427	1,385	4,502	<b>50</b>	1,387	3,803	8,435
<b>13</b>	0,428	1,385	4,808	<b>51</b>	1,501	3,803	8,518
<b>14</b>	0,428	1,400	5,088	<b>52</b>	1,548	3,804	8,522
<b>15</b>	0,428	1,520	5,180	<b>53</b>	1,711	3,805	8,532
<b>16</b>	0,429	1,630	5,189	<b>54</b>	1,764	3,815	8,535
<b>17</b>	0,430	1,714	5,428	<b>55</b>	1,764	3,855	8,574
<b>18</b>	0,431	1,763	5,566	<b>56</b>	1,764	3,863	8,645
<b>19</b>	0,431	1,764	5,844	<b>57</b>	1,764	4,003	8,717
<b>20</b>	0,431	1,764	5,852	<b>58</b>	1,855	4,056	8,846
<b>21</b>	0,431	1,764	5,896	<b>59</b>	1,987	4,097	8,889
<b>22</b>	0,431	1,768	5,941	<b>60</b>	2,076	4,161	8,924
<b>23</b>	0,431	1,813	6,292	<b>61</b>	2,077	4,166	8,936

<b>62</b>	2,087	4,172	8,964
<b>63</b>	2,151	4,183	8,968
<b>64</b>	2,207	4,186	9,036
<b>65</b>	2,441	4,280	9,082
<b>66</b>	2,513	4,286	9,092
<b>67</b>	2,514	4,286	9,270
<b>68</b>	2,755	4,286	9,305
<b>69</b>	2,900	4,288	9,419
<b>70</b>	3,018	4,518	9,461
<b>71</b>	3,018	4,586	9,510
<b>72</b>	3,019	4,663	9,513
<b>73</b>	3,021	4,730	9,528
<b>74</b>	3,045	4,774	9,538
<b>75</b>	3,046	4,806	9,539
<b>76</b>	3,046	4,820	9,596
<b>77</b>	3,047	4,841	9,673
<b>78</b>	3,389	4,892	9,719
<b>79</b>	3,394	4,930	9,772
<b>80</b>	3,394	4,951	9,882
<b>81</b>	3,394	4,956	9,925
<b>82</b>	3,428	4,965	10,629
<b>83</b>	3,437	4,967	10,646
<b>84</b>	3,545	4,983	10,666
<b>85</b>	3,642	4,984	10,682
<b>86</b>	3,671	4,986	10,783
<b>87</b>	3,688	4,988	11,504
<b>88</b>	3,803	4,989	11,806
<b>89</b>	3,803	5,053	11,879
<b>90</b>	3,804	5,073	11,947
<b>91</b>	3,804	5,141	11,990
<b>92</b>	3,815	5,180	12,034
<b>93</b>	3,855	5,227	12,034
<b>94</b>	3,863	5,235	12,058
<b>95</b>	4,003	5,306	12,150
<b>96</b>	4,056	5,331	12,151
<b>97</b>	4,060	5,385	12,257
<b>98</b>	4,097	5,403	12,380
<b>99</b>	4,132	5,434	12,471
<b>100</b>	4,166	5,479	12,493